# 折り紙の数学

## Mathematics of Paper Folding

鈴木　正樹
福島高専、一般教科
Masaki Suzuki
Fukushima National College of Technology， Department of General Education

（2009年９月18日受理）

Paper folding (=Origami) is an art and really does have many educational benefits. There are a number of recent very powerful results in paper folding mathematics. In this paper we introduce some topics that how do paper folding and mathematics relate to each other. In addition, we report on some contents of 'research practice' done in Fukushima National College of Technology at current year.

**Key words:** paper folding, Origami, Huzita's Axioms, angle trisection, theorems of Haga

## 1. はじめに

折り紙で数学ができないであろうか。このことについて多くの人々が長い時間をかけて構想を練ってきた。芳賀和夫氏により提唱されたオリガミクス（紙を折ったり重ねたりして、そこに生じる数理現象を追求する科学の1分野）は、新聞やテレビで取り上げられたり、雑誌に紹介されるなど定着し、また日本数学教育学会の全体講習や全国私立中学高等学校数学研修会の課題になり、その後、いくつかの大学の公開講座や各地での研修会のテーマや公開講座の題材にもなるなど、教育関係者の注目を集めた[1)-2)]。ロベルト・ゲルトシュレーガー氏は、折り紙の幾何を構築し、定規とコンパスを用いた古典的な作図問題では不可能とされた任意の角の三等分問題、デロスの問題、正7角形の作図問題を解いた[4)]。川崎敏和氏は、折り鶴変形理論の幾何学を詳しく解説し、前川淳氏は、表裏同等折り（美しい対称性を持つ折り紙グループ）に完璧な数学的定義を与えた。この他にも折り紙の数学は、多くの開拓分野がある。本小文では、これらのうちのいくつかの話題を折り紙の数学と題して紹介し、さらに、今年度のミニ研究で行った内容の一部を報告する。

## 2. 折り紙公理

折り紙公理とは、折り紙の数学の原理に関連した一連の規則であり、紙を折るときの基本的な操作を記述している。この公理においては、折りの操作は平面で完結し、全ての折り線は直線であると仮定する。公理は７つあり、公理１から６は藤田文章氏の折り紙公理として知られている。公理７は羽鳥公士郎氏によって2001年に発見された。公理は以下である。

**公理 1**

2点 $p, q$ が与えられたとき、2点を通るただ一つの折り方がある。

**公理 2**

2点 $p, q$ が与えられたとき、$p$ を $q$ に重ねるただ一つの折り方がある。

**公理 3**

2本の直線 $m, n$ が与えられたとき、$m$ を $n$ に重ねるような折り方がある。

**公理 4**

1点 $p$ と1本の直線 $m$ が与えられたとき、$m$ に垂直で $p$ を通るただ一つの折り方がある。

**公理 5**

2点 $p, q$ と1本の直線 $m$ が与えられたとき、$p$ を $m$ 上に重ね、$q$ を通る折り方がある。

**公理 6**

2点 $p, q$ と2本の直線 $m, n$ が与えられたとき、$p$ を $m$ 上に重ね、かつ $q$ を $n$ 上に重ねる折り方がある。

**公理 7**

1点 p と2本の直線 m, n が与えられたとき、p を m に重ね、n に垂直な折り方がある。

これらの公理から、辺や角の 2 等分が簡単にできること、さらにこの公理を繰り返すことによって、折り紙を用いて $1/2^r$ が作図可能なことが簡単に分かる。また、4 次までの方程式や、角の 3 等分などの問題を解くことも可能である。

## 2. 角の三等分

はるか昔の人々は、地面に棒で描いたり、炭で洞窟の壁に絵や模様を描いていた。そのうちある者が規則のある、いわゆる図形を描き始めた。そして、数学の心得のある者が、平面幾何の図形を作り出す方法を考え、便利な道具を発明した。それらのうちの2つがまっすぐな棒（目盛りのない定規）とコンパスである。まもなく、これらの道具を使って描けるものと描けないものを区別するという問題に多くの時間が費やされた。その中でギリシア時代の数学者たちによって、現在ギリシアの3大作図問題といわれる問いが立てられた。それは、次の3つの作図が、定規とコンパスを使って、可能かという問いである。

円積問題：

与えられた円と等しい面積をもつ正方形を作ること。

立方体倍積問題：

与えられた立方体の体積の2倍に等しい体積をもつ立方体を作ること。

角の三等分問題：

与えられた角を三等分すること。

現在では、これらすべて定規とコンパスのみでは作図できないことが証明されている。

ここでは、これらのうち角の三等分問題について触れる。定規とコンパスでは、任意の角を三等分することは不可能であるが、紙を折るという操作でそれは可能になる。その手順を紹介する[3]。

① 頂点 B を通る任意の角 ∠PBC を作る。（Fig. 1）

② 一定の幅で折り上げ BC に平行な等間隔の2直線を折る。（Fig. 2）

③ 図のように2点を移動する（公理 6）。（Fig. 3）

④ QQ' を延長して、折り目 QR をつける。（Fig. 4）

⑤ ④でつけた線を延長して折り目をつけると、∠PBRが求める角。（Fig. 5）

Fig. 6 で B を頂点とする三角形が合同であることから、∠PBC が三等分されることが分かる。

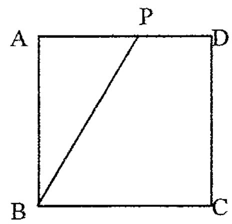

Fig. 1

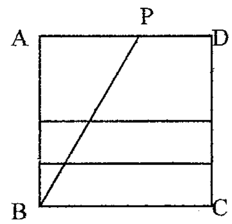

Fig. 2

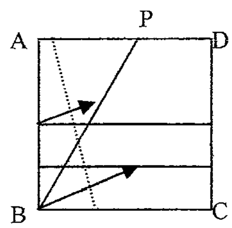

Fig. 3

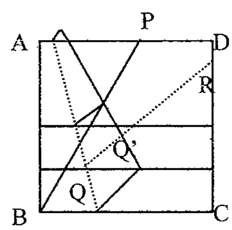

Fig. 4

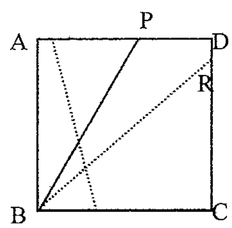

Fig. 5

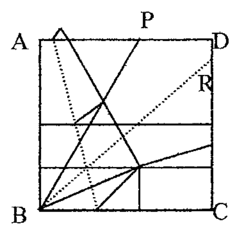

Fig. 6

## 3. 辺の三等分

次に辺の三等分について考える。これについては、芳賀の定理について触れる必要がある。芳賀の定理は現在では第一定理から第三定理までであるが、ここでは第一定理のみ紹介する。

### 3.1 芳賀の第一定理

**定理（芳賀の第一定理）**

正方形の一辺の中点にその辺に含まれない頂点を合わせて折ると、一辺が他の辺の一辺を三等分する。

（証明）

Fig. 7のように、正方形の一辺の中点にその辺に含まれない頂点を合わせる。正方形の一辺の長さを1とし、DFの長さを求める。

$$DF = a$$

とおくと、

$$EF = CF = 1 - a$$

$$DE = 1/2$$

であるので、三平方の定理より、

$$(1 - a)^2 = a^2 + (1/2)^2$$

$$\therefore a = 3/8$$

△AEH ∽ △DFE であるので、AE： AH = DF： DE から

$$1/2 : AH = 3/8 : 1/2$$

$$\therefore AH = 2/3$$

つまり、AH は正方形の一辺の長さの 2/3 であり、H は辺の三等分点の一つということになる。□

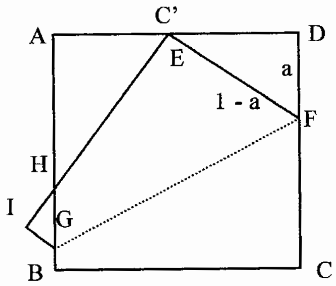


Fig. 7

この折り方のように、1辺に1つの点を定め（その点は中点に限らない）その点に対辺の一方の端を重ねて紙を折る折り方は「第一定理折り」と名づけられている。

### 3. 2 第一定理折りの一般化

Fig. 7 において △DEF は3辺の比が 3:4:5 とピタゴラス数になっている。このような三角形を作図するとなるとそれなりに苦労するが、折り紙を用いれば、わずか一折でできる。さらに、その他の比のピタゴラス数も中点以外の点を使う第一定理折りを行えば得ることができる。そこで、この第一定理折りについて、一般の場合について考える。

Fig. 8 のように上辺に任意の点をきめ、右下の頂点を重ねて紙を折る。その点を E、そして DE の長さを x とする。この1回の折り方で、中点を利用した場合と同様に他の辺や折り線にさまざまな長さが生じる。それらを Fig. 8 に示す。

実際、正方形の1辺の長さを1とすると、

$$DE = x, \quad AE = 1 - x$$

△DFE において、$x^2 + DF^2 = (1 - DF)^2$ より、

$$DF = (1 - x^2)/2$$

$$CF = 1 - DF = (1 + x^2)/2$$

△AEH ∽ △DEF なので、DF： 1 − x = x ： AH、x： (1 − DF) = CF： EH より、

$$AH = 2x/(1 + x)$$

$$EH = (1 + x^2)/(1 + x)$$

FG ⊥ EC より、△CKF ∽ △CDE であるので、

$$\triangle CDE \equiv \triangle GJF \quad \therefore FJ = x$$

$$CJ = 1 - (DF + x) = (1 - x)^2/2$$

$$GH = 1 - (AH + CJ) = 1 - \{2x/(1 + x) + (1 - x)^2/2\}$$

△JGF で $GF^2 = FJ^2 + GJ^2 = x^2 + 1$ より、

$$GF = (1 + x^2)^{1/2}$$

となる。

例えば、x = 2/3 とすれば、△DEF は 5:12:13 のピタゴラスの三角形となる。この他にも、第一定理折りを複数回することにより、分割点が更に分割点を作り、およそ素手では不可能と思えるような分割をすることも可能になる。

このように、折り紙を折ることで、非常に面白くて不思議な数理が見えてくる。

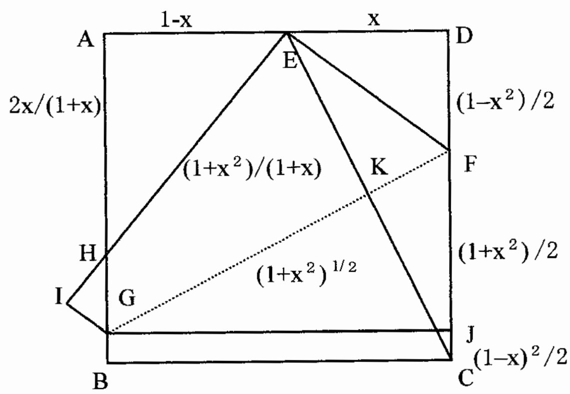


Fig. 8

## 5. ミニ研究での実践

この節では、今年度行ったミニ研究の内容の一部を報告する。

### 5.1 三角形の5心

三角形は内心、外心、垂心、重心、傍心を持つ。これらを合わせて5心という。以下にそれぞれの定義を与える。

内心：三角形の3つの内角の二等分線の交点
外心：三角形の3辺の垂直二等分線の交点
垂心：三角形の3つの頂点からそれぞれの対辺に引いた垂線の交点
重心：三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ3つの線分の交点
傍心：三角形の1つの内角と他の2つの外角の二等分線の交点

ミニ研究では、これら三角形の5心を2節で紹介した折り紙公理を使って、実際に折れることを確認した。定規やコンパスを使うより、正確にしかもきれいに3直線が1点で交わることがわかった。


Fig. 9
Poster of five's center folds（2Co W.Takahagi）

### 5.2 折り紙分度器の作成

3 節でみたように、折り紙では、角の三等分を作ることができる。ミニ研究では、この角の三等分と角の二等分を繰り返すことによって、以下のように5° 単位の角を得ることができた。ここで、→ は角の二等分を、⇒ は角の三等分を表す。もちろん、この他にも折り方はあるが、ここでは、なるべく手数が少ない折り方を挙げる。

| | |
|---|---|
| $5^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 30^\circ \Rightarrow 10^\circ \rightarrow 5^\circ$ |
| $10^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 30^\circ \Rightarrow 10^\circ$ |
| $15^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 30^\circ \rightarrow 15^\circ$ |
| $20^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 60^\circ \Rightarrow 20^\circ$ |
| $25^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 30^\circ$ |
| | $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \rightarrow 75^\circ \Rightarrow 25^\circ$ |
| $30^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 30^\circ$ |
| $35^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 60^\circ \Rightarrow 40^\circ$ |
| | $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \rightarrow 70^\circ \rightarrow 35^\circ$ |
| $40^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 60^\circ \Rightarrow 40^\circ$ |
| $45^\circ$ | $90^\circ \rightarrow 45^\circ$ |
| $50^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 60^\circ \Rightarrow 40^\circ$ |
| | $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ |
| $55^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 60^\circ \Rightarrow 40^\circ$ |
| | $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \rightarrow 70^\circ \rightarrow 35^\circ$ |
| | $90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ |
| $60^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 60^\circ$ |
| $65^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 60^\circ \Rightarrow 40^\circ$ |
| | $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ |
| | $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ \rightarrow 65^\circ$ |
| $70^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 60^\circ \Rightarrow 40^\circ$ |
| | $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \rightarrow 70^\circ$ |
| $75^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 30^\circ$ |
| | $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \rightarrow 75^\circ$ |
| $80^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 30^\circ \Rightarrow 10^\circ$ |
| | $90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$ |
| $85^\circ$ | $90^\circ \Rightarrow 30^\circ \Rightarrow 10^\circ \rightarrow 5^\circ$ |
| | $90^\circ - 5^\circ = 85^\circ$ |

基準になる角度をうまく選べば、理屈の上では、1度単位の角も折れることになり、折り紙分度器を作ることができる。

### 5.3 X折線の数理

4節で紹介した第一定理折りを、左右で行うことにより、本年度のミニ研究では次の数理現象を確認した。

まず、次の手順で、X字状に斜めに交差する2本の折り線を作図する。

① 一枚の折り紙の上辺の任意の点に1つ印をつける。
② 左下の頂点をその一点に重ねて紙を折る。
③ いったん紙を開き，今度は右下の頂点を同じ点にあわせて同様に紙を折る。
④ 紙を開く。(Fig. 10)

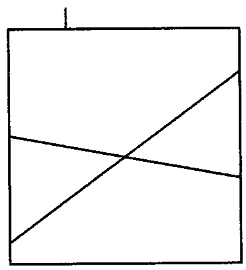

Fig. 10

この時、次のことが成り立つ。

**定理 1**
2本の折り線は必ず折り紙の中央で交差する。

**定理 2**
向かい合う2つの三角形の底辺の長さは上辺任意点の位置に関係なく一定である。

これらの定理は、実際に折ることで確認できる。証明は省略する。実は、折り線の交点は、上辺の任意点と下辺両端の2点を頂点とする三角形の外心になっていること、向かい合う2つの三角形の底辺の長さは1辺の長さの1/2になっていることなどがわかる。

正方形の場合、すなわち縦と横の辺の比が1:1の場合、上の定理が成り立つことが確認できたが、長方形の場合はどうであろうか。ミニ研究では、一般的な長方形について考察したので、その結果を述べる。Fig. 11 のような短辺と長辺の比が a:b の一般的な長方形ABCDを描き、上辺の任意点をPとする。折り線の両端や交点にもそれぞれFig. 11のように記号をつける。

EFはBPの垂直二等分線であるので、

$$\triangle BJE \backsim \triangle BAP$$
$$\therefore\ \angle BEJ = \angle BPA$$

一方、

$$\angle BPA = \angle PBC \quad (\text{錯角})$$
$$\therefore\ \angle BEJ = \angle PBC$$

このような関係は右側でも同様で、△BPCと△EIGは2つの底角が等しいことから

$$\triangle BPC \backsim \triangle EIG$$

であることがわかる。平行線の錯角は等しいので、

$$\triangle EIG \backsim \triangle FIH$$

I は △BPC の外心なので EG を底辺とする△EIG の高さと HF を底辺とする △FIH の高さは等しい。ゆえに

$$\triangle EIG \equiv \triangle FIH$$

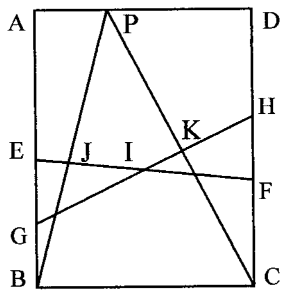


Fig. 11

ところで、△BPCの高さは長方形の長辺に等しく、△EIG (△FIH) の高さは長方形の短辺の半分なので、△EIG (△FIH) の底辺を m とすると、

$$BC : EG = a : m = b : a/2$$
$$\therefore\ m = a^2/(2b)$$

と表される。この m が、長辺 b の何分の1になっているかは、

$$m/b = a^2/(2b^2)$$

で与えられる。この式に辺の比をいれてみるとTable 1が得られる。つまり、$1/2^r$という数列を作ることができた。

このことは、芳賀和夫氏によってすでに知られた結果[2]であったが、ミニ研究の学生たちは、第一定

**Table 1**

| 辺の比 | m |
|---|---|
| 1:1 | 1/2 |
| $1:2^{1/2}$ | 1/4 |
| 1:2 | 1/8 |
| $1:2^{3/2}$ | 1/16 |

理折りから、他に情報を与えなくてもこの事実にたどり着いた。

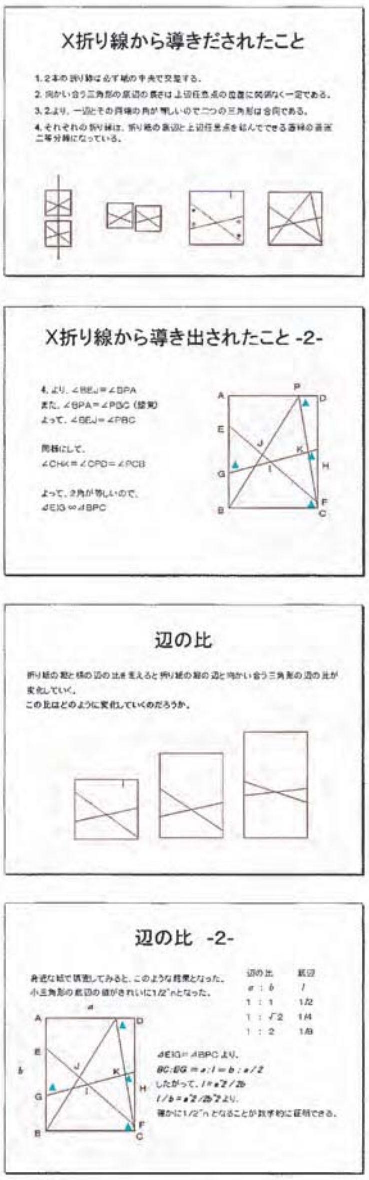


Fig. 12
Poster of X fold line（2Co J. Sugishita）

## 6. おわりに

今回は、特に体系だった展開や提案は行うことができなかった。また、本小文の内容もすでに知られた事実がほとんどで目新しさも感じられなかったかとも思う。それは、何よりも実践の乏しさにある。ミニ研究での実践は、今年度が初で、まだ手探りの状態である。

今後の課題としては、折り紙の特性をさらに理解し、次年度以降もミニ研究として取り上げ、実践を増やしていくことである。また、公開講座を開き、この折り紙の数学を生涯学習として広く一般の人々に提案したい。

## 7. 付録

今後の参考となるよう今年度のミニ研究の学生たちにアンケート（5名）を行ったので、最後に付録として載せる。

○ 折り紙の経験は
- ほとんんど無い。
- 小学生の頃まではやっていた。

○ 折り紙に対する教育的価値について
- 実際に手で折って数理現象を確認できるので価値はあると思う
- 深い所までは出来なかったので、今の段階では未知である。

○ ミニ研究の感想
- 多面体を作るのは楽しかった。
- 難しくて理解できないこともあったが、楽しみながらできた。
- 角の三等分は感動した。

この教育研究は、平成21年度福島県学術教育振興財団の研究助成を利用して行った。

## 文　献

1) 芳賀和夫：オリガミクスI，日本評論社，（1990）．
2) 芳賀和夫：オリガミクスII，日本評論社，（2005）
3) 伏見康治監修：サイエンス10月号 別冊付録 折り紙の科学（1980）．
4) ロベルト・ゲルトシュレーガー（訳 深川英俊）：折り紙の数学，森北出版株式会社，（2002）．