

## 行列の分解とその応用 II

### Matrix Decomposition and its Application II

鈴木 正樹

福島工業高等専門学校、一般教科

Masaki Suzuki

Fukushima Natinal College of Technology, Department of General Education

(平成20年9月17日受理)

In this paper we introduce C type Jacobi decomposition of matrix and give Plücker relations for C type matrix by applying the theorem of A. Berenstein, S. Fomin and A. Zelevinsky 1). Moreover we report that C type Jacobi decomposition can do pass construction to similar to A type Jacobi decomposition (Refer to 9)).

**Key words:** matrix, plücker relation, path construction

#### 1. はじめに

行列には様々な分解方法がある。この小文では、C型ヤコビ分解について取り上げ、A. Berenstein, S. Fomin and A. Zelevinsky 1) の定理を応用して、C型行列に対するブリュッカー関係式を導く。また、C型ヤコビ分解もA型ヤコビ分解と同様(9)を参照) にパス構成できることを報告する。

本小文で用いる小行列式の記号は9)を参照。

#### 2. C型ヤコビ分解

C型ヤコビ分解を定義し、一般のC型行列がC型ヤコビ分解できることをA型ヤコビ分解に関連させて組み合わせ論的に示す。

$P$  を  $A_{2n-1}$  型上三角行列とし、行列  $J$  を次の様に定義する。

$$J = \begin{pmatrix} 0 & j_n \\ -j_n & 0 \end{pmatrix} \quad j_n(n \times n) = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n E_{k, n-k+1}$$

$2n$  次の正方行列  $P$  が次の関係式を満たすとき、行列  $P$  は  $C_n$  型の行列であるという。

$$PJP^t = J \quad P^t \text{ は } P \text{ の転置行列} \quad (1)$$

$C_n$  型の行列全体は行列の積に関して群をなす。 $C_n$  型の行列の行列式は  $\pm 1$  である。以下、 $j' = 2n + 1 - j$  という記号を用いる。 $C_n$  のベキ零リ一環のシュヴァレー基底  $e_1, \dots, e_n$  を次のようにとる。

$$e_k = E_{kk+1} - E_{(k+1)'k'} \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad e_n = E_{nn'}$$

$C_n$  型の上三角行列の1径数族  $R_i(t)$  を以下のように定義する。

$$R_i(t) = 1 + te_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & t & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & -t \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$R_i(t)$  は  $R_i(t) = J_i(t)J_{(i+1)^r}(-t)$  という基本ヤコビ行列の積である。C 型の上三角行列を次のような  $R_i(t)$  の積に分解することを C 型ヤコビ分解という。

$$P = R_k(t) = R_{k_1}(t_1) \cdots R_{k_m}(t_m)$$

$R_i(t)$  の並べ方は  $C_n$  のワイル群の最長元  $w_0$  の最短表示  $w_0 = r_{k_1} \cdots r_{k_m}$  に対応する添え字の列  $k = (k_1 \cdots k_m)$  で指定することができる。 $w_0$  の長さ  $m$  は  $C_n$  型の場合  $m = n^2$  である。

ここで、 $C_n$  型ヤコビ分解の並べ方を指定する添え字の列  $k$  の中から良いものを一つ次のように指定する。

$$k = \begin{cases} \underbrace{(1, 3, \dots, 2k+1, 2, 4, \dots, 2k, \dots, 1, 3, \dots, 2k+1, 2, 4, \dots, 2k)}_{n} & : n = 2k+1 (k \geq 1) \\ \underbrace{(1, 3, \dots, 2k-1, 2, 4, \dots, 2k, \dots, 1, 3, \dots, 2k-1, 2, 4, \dots, 2k)}_{n} & : n = 2k (k \geq 1) \end{cases}$$

このように指定した  $k$  がどのように良いのかというと、パスの図を描いたときにきれいなパスの図になっていることである。

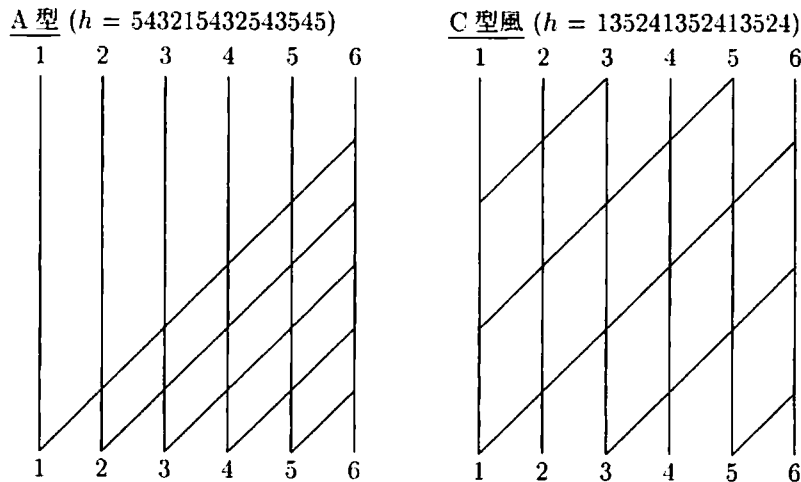
$C_n$  型の行列が、 $k$  の形にヤコビ分解できることを示す。  $R_i(t) = J_i(t)J_{i^r}(-t)$  であったので、

$$h = \underbrace{(1, 3, \dots, 2n-1, 2, 4, \dots, 2n-2, \dots, 1, 3, \dots, 2n-1, 2, 4, \dots, 2n-2)}_n$$

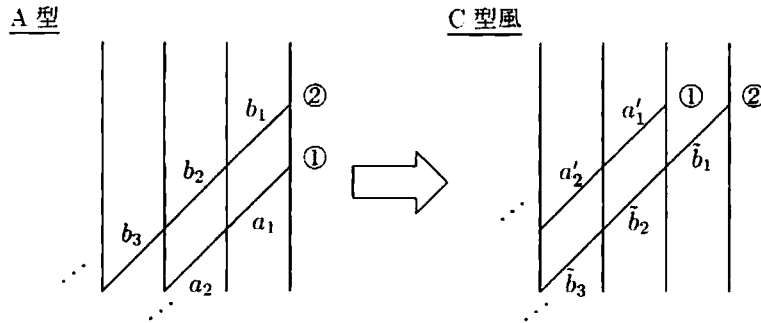
と  $A_{2n-1}$  型のヤコビ分解をしたものに (1) 式の条件をつけたものが、 $C_n$  型のヤコビ分解だといえる。よって、 $k$  の形にヤコビ分解できることを示すには、 $A_{2n-1}$  型の行列が  $h$  の形にヤコビ分解できることを示せば良い。 $h$  による分解を便宜上 C 型風ヤコビ分解ということにする。 $A_{2n-1}$  型上三角行列を  $C_n$  型風ヤコビ分解すると、行列  $P$  は次のようになる。

$$P = V_1 V_2 \cdots V_{2n} = \begin{pmatrix} 1 & v_1^1 & & & & \\ & 1 & v_3^1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & v_{2n-1}^1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v_2^2 & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & v_{2n-2}^2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & v_{2n}^{2n} & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & v_{2n-2}^{2n} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

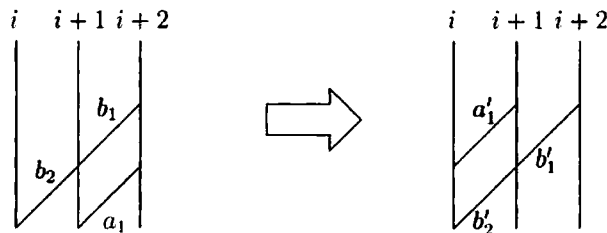
ここで、各行列の  $v_j^i$  成分の上の添え字は  $V_i$  の行列の成分であることを、下の添え字は、その行列の  $j$  行目の成分であることを表す。では、A 型の行列が C 型風ヤコビ分解できることを示そう。9) で一般正方行列が A 型ヤコビ分解できることを示したので、A 型タイプから C 型風への変換ができることをいう。わかりやすくする為、行列のサイズを  $6 \times 6$  で A 型のパスと C 型風のパスを見比べると次のようになる。



上の図より、A 型タイプのパスの右から偶数番目のラインを左上に移動すれば C 型風のパスになる。その為には、ラインの移動に伴う変数の変換が与えられれば良い。次の図は①のラインが②のラインを飛び越すときの図である。



移り変わった後の各変数  $a'_i, \tilde{b}_i$  がもとの変数  $a_i, b_i$  でどのように表せるかを考える。まず、



の場合を考察する。このパスの様子を行列で表すと次の関係式が成り立つ。

$$J_{i+1}(a_1)J_i(b_2)J_{i+1}(b_1) = J_i(b'_2)J_{i+1}(b'_1)J_i(a'_1)$$

式の様子を  $a_1 b_2 b_1 \rightarrow b'_2 b'_1 a'_1$  と表すことにする。矢印の後の変数は矢印の前の変数を用いて

$$b'_2 = \frac{b_2 b_1}{a_1 + b_1}, \quad b'_1 = a_1 + b_1, \quad a'_1 = \frac{a_1 b_2}{a_1 + b_1}$$

と表せる。以下同様に、 $a_2 b_3 b'_2 \rightarrow b'_3 \tilde{b}_2 a'_2$ ,  $a_3 b_4 b'_3 \rightarrow b'_4 \tilde{b}_3 a'_3$ ,  $a_4 b_5 b'_4 \rightarrow b'_5 \tilde{b}_4 a'_4$  を考えると、 $a'_i, \tilde{b}_i$  がもとの  $a_i, b_i$  で以下のように表せることがわかる。

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{a_1 b_2}{a_1 + b_1}, & \tilde{b}_1 &= a_1 + b_1, \\ a'_2 &= \frac{a_2 b_3 (a_1 + b_1)}{a_1 a_2 + b_1 a_2 + b_1 b_2}, & \tilde{b}_2 &= \frac{a_1 a_2 + b_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1 + b_1}, \\ a'_3 &= \frac{a_3 b_4 (a_1 a_2 + b_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_1 a_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 a_3 + b_1 b_2 b_3}, & \tilde{b}_3 &= \frac{a_1 a_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 a_3 + b_1 b_2 b_3}{a_1 a_2 + b_1 a_2 + b_1 b_2}, \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

一般に

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{a_n b_{n+1} Q_{n-1}}{Q_n}, \quad \tilde{b}_n = \frac{Q_n}{Q_{n-1}} \\ Q_n &= \sum_{i=0}^n \prod_{k=1}^i b_k \prod_{t=i+1}^n a_t, \quad Q_0 = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

となる。以上のことからラインの入れ替えは (2) 式の変換により可能となることがわかる。よって、A 型から C 型風への変換もできることがわかる。行列  $P$  の各  $v_j^i$  の要素を求めるには、9) で紹介した定理 4 に従う方法が一番簡単だと思われる。以上のことより、A 型の行列は C 型風ヤコビ分解ができることがわかる。この分解を C 型の行列に適用すれば、C 型ヤコビ分解になる。

### 3. プリュッカー関係式

小行列式の間には種々の関係式がある。本小文では C 型に焦点をあてているが、まずこの節で A 型の場合の関係式を紹介する。

A 型の基本ヤコビ行列の満たす関係式は次の 2 つである。

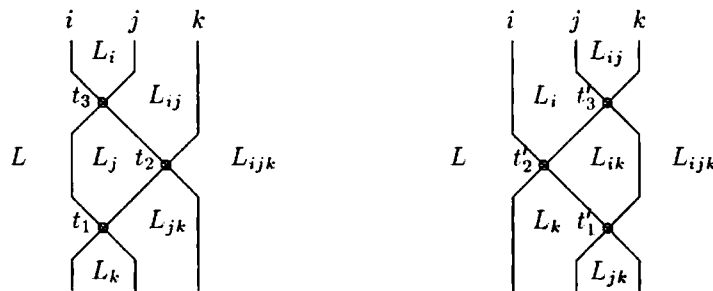
$$J_i(t_1)J_j(t_2) = J_j(t_2)J_i(t_1) \quad |i - j| \geq 2 \quad (3)$$

$$J_i(t_1)J_j(t_2)J_i(t_3) = J_j(t'_1)J_i(t'_2)J_j(t'_3) \quad |i - j| = 1 \quad (4)$$

(4) 式の各  $t'_i$  は  $t_i$  を用いて次のように表せる。

$$t'_1 = \frac{t_2 t_3}{t_1 + t_3}, \quad t'_2 = t_1 + t_3, \quad t'_3 = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_3} \quad (5)$$

各  $t_i, t'_i$  はチャンパー変数を用いてどのように表せるかは、次の紐の図で考えれば良い ( $i < j < k$  とする)。



$L = \{ l; i, j, k \}$  のラインの交点  $(i, j), (i, k), (j, k)$  より左を通るライン、以下各  $L_i$  は  $L \cup \{i\}$  の意味で用いるとする。上の図より各  $t_i, t'_i$  は、9) の定理 4 より次のように表される。

$$t_1 = \frac{M_L M_{Ljk}}{M_{Lj} M_{Lk}}, \quad t_2 = \frac{M_{Lj} M_{Lijk}}{M_{Lij} M_{Ljk}}, \quad t_3 = \frac{M_L M_{Lij}}{M_{Li} M_{Lj}} \quad (6)$$

$$t'_1 = \frac{M_{Lk} M_{Lijk}}{M_{Lik} M_{Ljk}}, \quad t'_2 = \frac{M_L M_{Lik}}{M_{Li} M_{Lk}}, \quad t'_3 = \frac{M_{Li} M_{Lijk}}{M_{Lij} M_{Lik}} \quad (7)$$

(5) 式に (6), (7) 式の各  $t_i, t'_i$  を代入すると次の関係式が得られる。

$$M_{Lik} M_{Lj} = M_{Li} M_{Ljk} + M_{Lij} M_{Lk} \quad (8)$$

この関係式はプリュッカー関係式と呼ばれているものである。 $M_J$  を  $\varphi^J(X)$  ( $X$  は一般の行列) としても関係式は満たす。

### 4. 主結果

以下では、紐の図を描いたときに現れる C 型の小行列式の関係式を考察し、そこから C 型プリュッカー関係式 (主定理 1) を導く。また C 型ヤコビ分解もパス構成できること (主定理 2) を述べる。

#### 4.1. C 型プリュッカー関係式

$C_n$  型の場合 (3), (4) 式に対応する関係式は次の 3 つである。

$$R_i(t_1)R_j(t_2) = R_j(t_2)R_i(t_1) \quad |i - j| \geq 2 \quad (9)$$

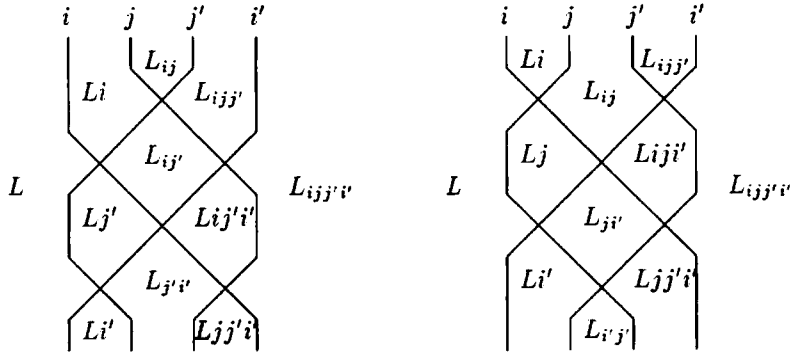
$$R_i(t_1)R_j(t_2)R_i(t_3) = R_j(t'_1)R_i(t'_2)R_j(t'_3) \quad |i - j| = 1 (1 \leq i, j \leq n - 1) \quad (10)$$

$$R_i(x_1)R_j(x_2)R_i(x_3)R_j(x_4) = R_j(y_4)R_i(y_3)R_j(y_2)R_i(y_1) \quad |i - j| = 1 (n - 1 \leq i, j \leq n) \quad (11)$$

(10) 式の各  $l_i, l'_i$  は (5) 式を満たす。よって  $C_n$  型のチャンパー変数  $M_J$  も (8) 式の関係式を満たす。(11) 式の各  $y_i$  は  $x_i$  を用いて次のように表せる。

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_3 x_4}, & y_2 &= \frac{(x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_3 x_4)^2}{x_1^2 x_2 + x_1^2 x_4 + 2x_1 x_3 x_4 + x_3^2 x_4}, \\
 y_3 &= \frac{x_1^2 x_2 + x_1^2 x_4 + 2x_1 x_3 x_4 + x_3^2 x_4}{x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_3 x_4}, & y_4 &= \frac{x_2 x_3^2 x_4}{x_1^2 x_2 + x_1^2 x_4 + 2x_1 x_3 x_4 + x_3^2 x_4}.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

これも先ほどと同様に紐の図でチャンパー変数を用いてどのように表せるか考える ( $i < j$  とする)。



$L = \{ l; i, j, j', i' \}$  のラインの交点より左を通るライン、 $\sharp(L) = n - 2$  とする。

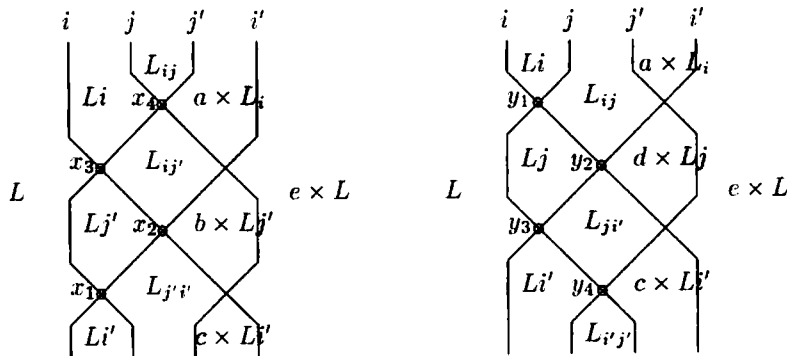
ここで補題を与える。

**補題 1.**  $X$  を  $C_n$  型の行列とし、 $\det X = 1$  とする。集合  $J$  を  $J = \{j_1, \dots, j_r\} \subset \{1, \dots, n, n', \dots, 1'\}$  とするとき、次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \triangleleft^J(X) &= (-1)^{\sharp(J) + \|J\|} \triangleleft^{(J)'}(X) \\
 \|J\| &= \sum_{i=1}^r (j_i - i).
 \end{aligned}$$

証明は行わないが、逆行列の小行列式に関する公式を用いれば補題の結果が得られる。

この補題より、各チャンパー変数は符号付で左右対称の値になることから次のような図になる。



各  $a, b, c, d$  は補題の式から出てくる符号を表す。上の図より各  $x_i, y_i$  は次のように表される。

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{M_L M_{L_{j'i'}}}{M_{L_{j'}} M_{L_{i'}}}, & x_2 &= b \times \frac{M_{L_{j'}} M_{L_{j'}}}{M_{L_{ij'}} M_{L_{j'i'}}}, & x_3 &= \frac{M_L M_{L_{ij'}}}{M_{L_i} M_{L_{j'}}}, & x_4 &= a \times \frac{M_{L_i} M_{L_i}}{M_{L_{ij'}} M_{L_{ij'}}}, \\
 y_1 &= \frac{M_L M_{L_{ij}}}{M_{L_i} M_{L_j}}, & y_2 &= d \times \frac{M_{L_j} M_{L_j}}{M_{L_{ij}} M_{L_{j'i}}}, & y_3 &= \frac{M_L M_{L_{j'i'}}}{M_{L_j} M_{L_{i'}}}, & y_4 &= d \times \frac{M_{L_{i'}} M_{L_{i'}}}{M_{L_{j'i'}} M_{L_{j'i'}}}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

(12) 式に (13) 式の各  $x_i, y_i$  を代入すると次の関係式が得られる。

$$a \times M_{Lj'v} M_{Li} M_{Li} + a \times M_{Lij'} M_{Li} M_{Li'} + b \times M_{Lij'} M_{Lj} M_{Lj'} - b \times M_{Lij} M_{Lj'} M_{Lj'} = 0 \quad (14)$$

$$a \times M_{Lij'} M_{Li'} M_{Li'} + a \times M_{Lj'v} M_{Li} M_{Li'} + b \times M_{Lj'v} M_{Lj'} M_{Lj'} - b \times M_{Lj'v} M_{Lj} M_{Lj'} = 0 \quad (15)$$

$$a = c, \quad b = d. \quad (16)$$

ここで、符号  $a, b$  について詳しく考察する。補題より、

$$\begin{aligned} M_{Li} &= \triangleleft^{L \cup \{i\}}(Y) \\ &= (-1)^{\sharp(L \cup \{i\})_{>n} + \sum(L \cup \{i\})} \triangleleft^{L \cup \{i, j', i'\}}(Y) = (-1)^{\sharp(L \cup \{i\})_{>n} + \sum(L \cup \{i\})} M_{Lijj'}. \end{aligned}$$

よって、

$$a = (-1)^{\sharp(L)_{>n} + \sum L + i - \frac{1}{2}n(n-1)}. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} M_{Lj'} &= \triangleleft^{L \cup \{j'\}}(Y) \\ &= (-1)^{\sharp(L \cup \{j'\})_{>n} + \sum(L \cup \{j'\})} \triangleleft^{L \cup \{i, j, j'\}}(Y) = (-1)^{\sharp(L \cup \{j'\})_{>n} + \sum(L \cup \{j'\})} M_{Lij'v}. \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} b &= (-1)^{\sharp(L)_{>n} + \sum L + j' - \frac{1}{2}n(n-1)} = (-1)^{\sharp(L)_{>n} + 1 + \sum L + 2n - j + 1 - \frac{1}{2}n(n-1)} \\ &= (-1)^{\sharp(L)_{>n} + \sum L + j - \frac{1}{2}n(n-1)}. \end{aligned} \quad (18)$$

(17),(18) 式より (14),(15) 式は次のようになる。

$$(-1)^{j-i} M_{Lj'v} M_{Li} M_{Li} + (-1)^{j-i} M_{Lij'} M_{Li} M_{Li'} + M_{Lij'} M_{Lj} M_{Lj'} - M_{Lij} M_{Lj'} M_{Lj'} = 0 \quad (19)$$

$$(-1)^{j-i} M_{Lij'} M_{Li'} M_{Li'} + (-1)^{j-i} M_{Lj'v} M_{Li} M_{Li'} + M_{Lj'v} M_{Lj'} M_{Lj'} - M_{Lj'v} M_{Lj} M_{Lj'} = 0 \quad (20)$$

ここで、新しく記号を導入する。 $A = \{a_1, \dots, a_m\}, B = \{b_1, \dots, b_m\}$  のとき  $A; B$  は添え字の列  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$  を表すものとする。この記号を用いて上の式を表す。(19) 式の各項を考えると次のようになる。

$$\begin{aligned} M_{Lj'v} M_{Li} M_{Li} &= (-1)^{\sharp(L; \{j'v\})} M_{L; j'v} M_{L; i} M_{L; i} \\ M_{Lij'} M_{Li} M_{Li'} &= (-1)^{\sharp(L; \{ij'\})} M_{L; ij'} M_{L; i} M_{L; i'} \\ M_{Lij'} M_{Lj} M_{Lj'} &= (-1)^{\sharp(L; \{ij\})} M_{L; ij'} M_{L; j} M_{L; j'} \\ M_{Lij} M_{Lj'} M_{Lj'} &= (-1)^{\sharp(L; \{ij\})} M_{L; ij} M_{L; j'} M_{L; j'} \end{aligned}$$

(20) 式も同様。そして、 $\sharp(i < L < j) = p, \sharp(j' < L < i')$  とすると、補題より  $p + q = j - i + 1$  となるので、以上のことより、(19),(20) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned} -M_{Lj'v} M_{L; i} M_{L; i} - M_{L; ij'} M_{L; i} M_{L; i'} + M_{L; ij'} M_{L; j} M_{L; j'} - M_{L; ij} M_{L; j'} M_{L; j'} &= 0 \\ -M_{L; ij'} M_{L; i'} M_{L; i'} - M_{L; j'v} M_{L; i} M_{L; i'} + M_{L; j'v} M_{L; j'} M_{L; j'} - M_{L; j'v} M_{L; j} M_{L; j'} &= 0 \end{aligned}$$

これらをまとめて次の定理とする。

**主定理 1** ( $C$  型ブリュッカー関係式).  $C_n$  型ヤコビ分解において紐の図を描いたときにできるチャンパー変数は (8) 式に加えて、 $\sharp(L) = n - 2, i < j < j' < i'$  のとき次の関係式を満たす。

$$M_{Lj'v} M_{L; i} M_{L; i'} - M_{L; j'v} M_{L; i} M_{L; i} + M_{L; ij'} M_{L; j} M_{L; j'} - M_{L; ij} M_{L; j'} M_{L; j'} = 0$$

$$M_{L; ij'} M_{L; i'} M_{L; i'} - M_{L; j'v} M_{L; i} M_{L; i'} + M_{L; j'v} M_{L; j'} M_{L; j'} - M_{L; j'v} M_{L; j} M_{L; j'} = 0$$

この関係式は  $M_j$  を  $\triangleleft^j(X)$  ( $X$  は一般の  $C$  型行列) としても成り立つ。

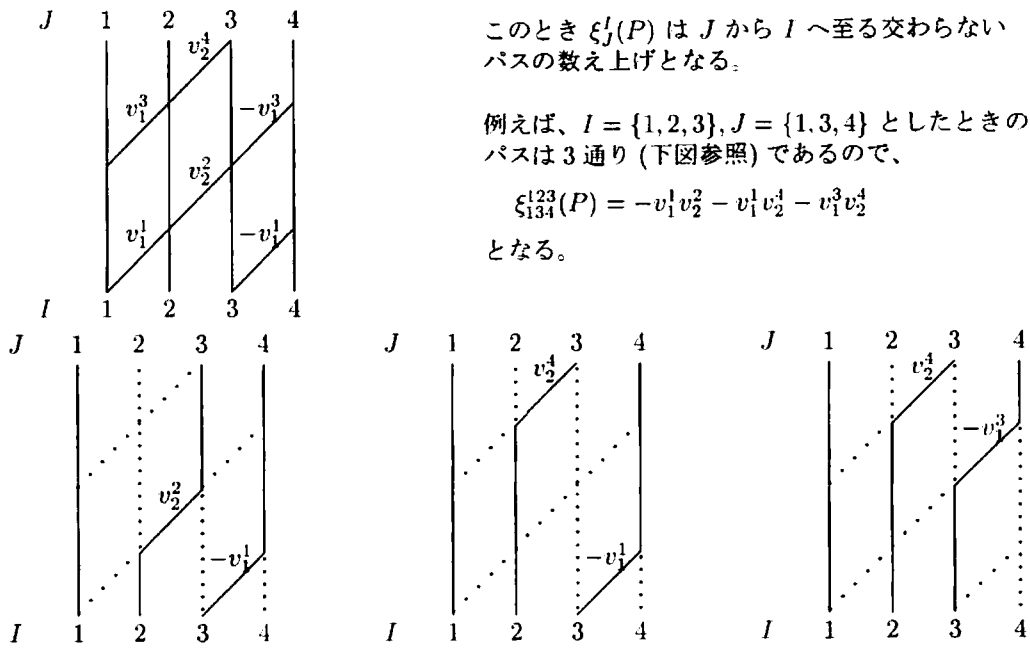
4.2. C 型行列の小行列式のパス構成

この節では C 型ヤコビ分解もパス構成できることを具体的に例を用いて示す。パスの定義は 9) を参照。

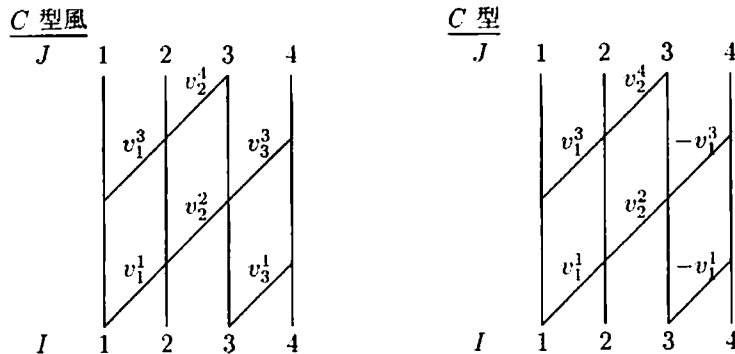
$P$  を  $C_2$  型の行列とする。最短表示に対応する  $k$  の列を  $k = (1, 3, 2, 1, 3, 2)$  と指定する。このとき行列  $P$  の C 型ヤコビ分解は次のようになる。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & v_1^1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -v_1^1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & v_2^2 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v_1^3 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -v_1^3 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & v_2^4 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

ここでは各要素  $v_j^i$  が行列  $P$  を用いてどの様に表されるかについては触れない。パスは次の図のようになる。



ここで、次の 2 つのパスを見比べる。左が C 型風のヤコビ分解によるパス構成 (つまり A 型) で、右が C 型ヤコビ分解によるパス構成である。



この図より、C 型ヤコビ分解は C 型風ヤコビ分解に  $v_3^1 = -v_1^1, v_3^3 = -v_1^3$  の条件をつけたものである。一般の  $C_{2n}$  型の場合は

$$j > n \text{ のとき } v_j^i = -v_{2n-j}^i$$

とすれば C 型ヤコビ分解の要素と一致する。よって C 型行列の小行列式のパス構成は次のように定理としてまとめることができる。

主定理 2 (*C* 型行列の小行列式のパス構成).  $P$  を  $C_{2n}$  の上三角行列,  $I = \{1, \dots, r\}$ ,  $J = \{j_1, \dots, j_r\}$  のとき次の関係式が成り立つ。

$$S_{\lambda}^{(r)} = \xi_J^I(P) = \sum_{p \in P_{2n-1}(I, J)} \prod_{(i, j) \in p} v_j^i$$

要素  $v_j^i$  については  $v_j^i = -v_{2n-j}^i (j > n)$  を満たすこととする。ここで,  $(i, j) \in p$  は  $I_{i-1} \ni j$  かつ  $I_i \ni j+1$ , すなわちパスの言葉では,  $I_i$  から  $I_{i-1}$  に下るステップで左から  $j$  番目の斜めの線を通過したことを表す。

このパス構成は同様に斜めのラインごとに数字を読んでいけばタブロウ構成に対応させることができる。しかし, ここで云うタブロウ構成は行列  $P$  の小行列式のタブロウ構成である。今後の課題は, これらのパス構成, タブロウ構成と *C* 型の指標との何らかの関連付けである。

### 参考文献

- 1) A. Berenstein, S. Fomin and A. Zelevinsky. Parametrizations of canonical bases and totally positive Matrices. *Adv.in Math.* 122 (1996), 49-149.
- 2) V.V. Bazhanov and N.Y. Reshetikhin. Scattering amplitudes in offcritical models and RSOS integrable models. *Funkcial.Ekvac.* 45 (2002), 237-258.
- 3) W. Fulton. Young Tableaux. London Mathematical Society Student Texts 35. Cambridge University Press. New York, (1997).
- 4) I. Gessel and G. Viennot. Binomial determinants, paths, and hook length formulas. *Adv.in Math.* 58 (1985), 300-321.
- 5) I.G. Macdonald. Schur functions : Theme and variations. *Publ.I.R.M.A. Strasbourg. Acte 28<sup>e</sup>, Séminaire Lotharingien, (1992),5-39.*
- 6) I.G. Macdonald. Symmetric Functions and hall Polynomials, Second Edition. Oxford University Press. (1995).
- 7) J. Nakagawa, M. Noumi, M. Shirakawa and Y. Yamada. Tableau representation for Macdonald's ninth variation of Schur functions. *Physics and combinatorics, Nagoya (2000), 180-195.*
- 8) Y. Yamada. A birational representation of Weyl group, combinatorial R-matrix and discrete Toda equation. *Physics and combinatorics, Nagoya (2000), 305-319.*
- 9) 鈴木 正樹. 行列の分解とその応用. 福島工業高等専門学校研究紀要, 48 (2007).
- 10) 野海正俊. パンルヴェ方程式 -対称性からの入門-. 朝倉書店 (2000).