

# ばね振り子の運動

The motion of the spring pendulum

鈴木 三男・根本 信行・布施 雅彦・増田 健二\*

福島工業高等専門学校、一般教科 \*静岡大学、工学部

Mitsuo Suzuki, Nobuyuki Nemoto, Masahiko Fuse and Kenji Masuda\*

Fukushima National College of Technology, Department of General

\*Shizuoka University, Department of Engineering

(平成20年9月11日受理)

To understand a simple harmonic oscillation, the spring pendulum is effective teaching materials. If you swing the spring pendulum from a certain angle, you will observe the complicated motion of the spring pendulum. We analyze the complicated motion by the video image position analysis—using a computer and Hi-Vision camera. We compare and examine measurement results and simulation results.

Key words: spring pendulum, video image position analysis, computer, Hi-Vision camera, simulation

## 1. はじめに

単振動は力学分野の中でも重要な項目であり、本校では2学年の前期に講義及び実験を実施している。実験ではFig. 1のように「ばね振り子」と「単振り子」の2テーマを4人1組で実施している。ばね振り子では、ばね定数 $k$ を測定した後、振り下げおもりの質量 $m$ と周期 $T$ の関係を実験的に確かめさせている。また、単振り子の実験では、糸の長さ $l$ と単振り子の周期 $T$ の関係を実験的に確かめるとともに、重力加速度 $g$ を求めさせている。

Fig. 2に示す単振り子の運動は、次の運動方程式で表される。

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \approx -mg\theta \quad (1)$$

通常、振幅が小さい時には、 $\sin \theta \approx \theta$ と近似することができ、単振り子の周期 $T$ は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2)$$

となる。これより振幅が小さい時には、ガリレオ・ガリレイの振り子の等時性が成り立つ。しかし、振幅が大きくなってくると、 $\sin \theta \approx \theta$ とする近似は成り立たなくなり、周期 $T$ は振幅に依存する。単振り子の実験に際しては、事前の実験上の注意で周期の振幅依存性を説明しているため、学生には単振り子の振幅を出発点だけ小さくしたデータを取るよう心がけさせている。

しかし、ばね振り子の実験では、振り下げおもりを鉛直上下に単振動させるだけで、振幅に依存しないので、おもりが外れないように指示して、学生に周期を測定させている。我々は、このばね振り子の実験準備

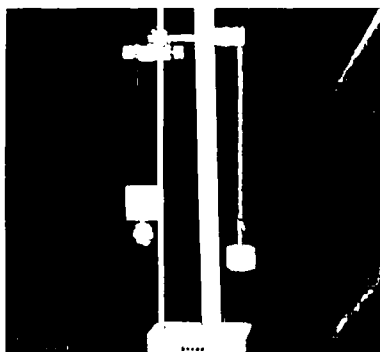


Fig. 1 Student experiment

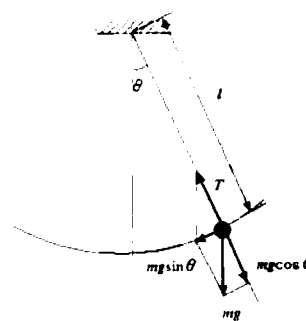


Fig. 2 simple pendulum

のための予備実験中に、ばね振り子を振動させながら、単振り子のように運動させた時にどのような運動をするのかに興味を抱いた。そこで鉛直方向と任意の角度で、少しばねを伸ばした状態から運動させると、ばね振り子は不思議な軌跡を描きながら運動する。このばね振り子の運動は、理論的に運動方程式を適用することによって解析できるのではないかと考えて、本研究に取り組んだ。測定結果から低学年用実験教材と考えていた「ばね振り子」が、高学年または専攻科生対象の演示・授業教材として利用できるかも検討する。

2. ばね振り子の運動方程式

2.1 鉛直

低学年の実験では、Fig. 3(a)に示すように、ばね定数 $k$ のばねの上端を固定して、ばねを鉛直につらし、下端に質量 $m$ のおもりをつり下げて、最初におもりを静止させる。このときのばねの伸びを $x_0$ 、また重力加速度を $g$ とすれば、おもりに働く力のつりあいは、

$$mg - kx_0 = 0 \tag{3}$$

となる。ただし、鉛直下向きを正とする。次につりあいの状態からさらに下向きおもりを引き下げて手を放すと、おもりは鉛直上下に単振動を始める。Fig. 3(b)の示すように、つりあいの位置から下向きに $x$ だけ変位しているおもりの運動方程式は、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x + x_0) = -kx \tag{4}$$

となり、ばね振り子の周期 $T$ は次式となる。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{5}$$

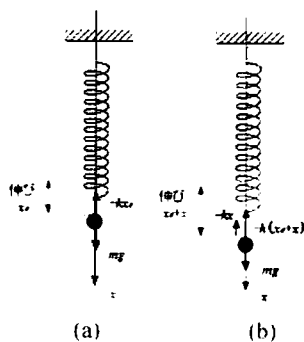


Fig. 3 Spring pendulum(Vertical)

実験では、おもりの質量 $m$ と周期 $T$ が(5)式を満足することを学生に確かめさせている。

2.2 任意の角度 $\theta$

先の実験と同様Fig. 4(a)に示すように、ばね定数 $k$ 、自然の長さ $l_0$ であるばねの上端を固定して、ばねを鉛直につらし、さらに下端に質量 $m$ のおもりをつり下げて、最初におもりを静止させる。このときのばねの長さ(=定常長)を $l$ とすれば、ばねの伸びは $(l-l_0)$ であり、重力加速度を $g$ とすれば、おもりに働く力のつりあいは、

$$mg - k(l - l_0) = 0 \quad \text{より} \quad l_0 = l - \frac{mg}{k} \tag{6}$$

となる。次に鉛直方向と任意の角度で、少しばねを伸ばした状態から手を放すと、ばね振り子は複雑な運動を始める。ばね振り子の運動は、単純な1次元の運動から2次元の運動となり、Fig. 4(b)に示すように、鉛直方向との角度が $\theta$ で、ばねの長さが $r$ の状態になったとすれば、 $r$ および $\theta$ 方向のおもりの運動方程式は、次のようになる。

(1)  $r$ 方向

$$m \left( \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = mg \cos \theta - k(r - l_0) \tag{7}$$

(2)  $\theta$ 方向

$$m \left( 2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \left( \frac{dr}{dt} \right) + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) = -mg \sin \theta \tag{8}$$

上式(6)~(8)は後のシミュレーションでは、根幹のプログラムに組み込まれている。

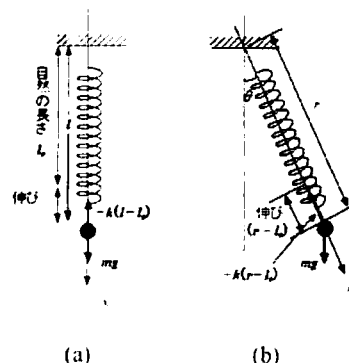


Fig. 4 Spring pendulum(A certain angle)

### 3. 実験および結果

#### 3.1 方法

ばね振り子のおもりに赤い反射シールを貼り、カメラのシャッターを開放して、ばね振り子の実際の運動を撮影した写真がFig. 5である。ばね振り子の運動は非常に複雑であり、運動を解析するのは大変である。そこで、二重振り子の複雑な運動解析に使用した、ビデオ画像位置解析法<sup>11)</sup>を利用することとした。独自に開発したこの方法の解析手順は次の通りである。

##### 解析手順

- (1) ハイビジョンデジタルビデオカメラ (DMX-HD1000 SANY製) を使い、録画モード1280×720 (60フレーム/秒) で、ばね振り子の運動を約20秒間ハイビジョン撮影する。
- (2) 画像編集ソフトを使用し、撮影した動画を1秒間に60枚のbmp形式の静止画に自動変換して、ハードディスクに保存する (約3G程度の容量が必要)。
- (3) ばね振り子用に改良したビデオ画像位置解析法を使い、おもりの位置座標を自動的に解析し、位置データを保存する。
- (4) 位置データ解析プログラム (Excelのマクロ) を利用して、運動のトレースおよび運動の分析を行う。

#### 3.2 結果

ばね定数5.6N/m、自然の長さ0.14mのばねに、質量 $8.0 \times 10^{-3}$ kgのおもりをぶら下げて実験を行った。このばね振り子の周期 $T$ および振動数 $f$ は、(5)式から次のように求められる。

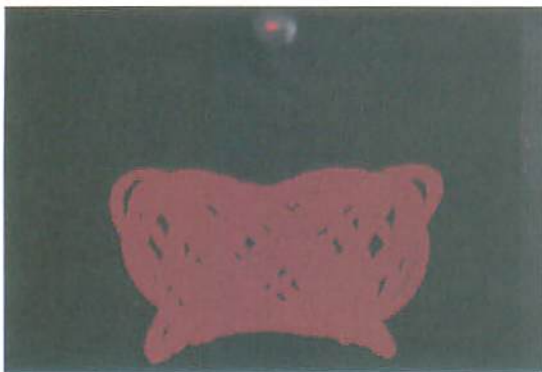


Fig. 5 The motion of the spring pendulum(Photograph)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{80 \times 10^{-3}}{5.6}} = 0.75(\text{s})$$

$$f = \frac{1}{T} = 1.33(\text{Hz}) \quad (9)$$

##### (1) 鉛直

Fig. 3(b)のように鉛直に上下に単振動させたとき、ばね振り子の変位 $x$ の時間変化をFig. 6に、その周波数分解した結果をFig. 7に示す。Fig. 6のグラフから変位は正弦波曲線を描いて変化しており、Fig. 7からその周波数は1.35Hzである。この値は理論値(9)式にほぼ一致し、ビデオ画像位置解析法による運動解析の正しさを示している。

##### (2) 任意の角度

Fig. 4(b)のように鉛直方向と任意の角度で、少しばねを伸ばした状態から手を放し、その後のばね振り子の運動の軌跡をFig. 8に、また鉛直方向となす角度 $\theta$ の時間変化をFig. 9に、そして角度 $\theta$ の周波数分解した結果をFig. 10に示す。

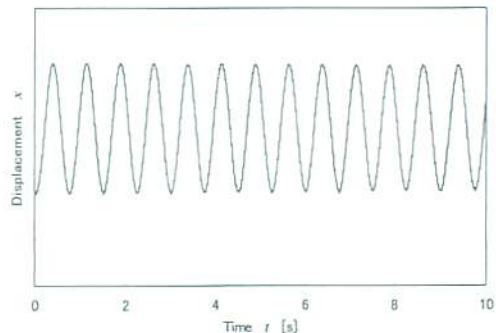


Fig. 6 The displacement of the spring pendulum

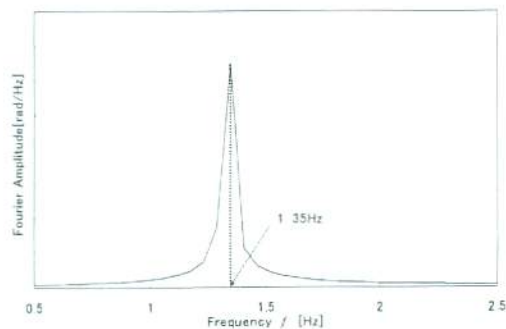


Fig. 7 Frequency analysis of the spring pendulum

Fig. 5の写真と同様に、Fig. 8のばね振り子の軌跡は運動の複雑さを示している。全体として左右対称に近い、蝶が羽を広げたような形となった。またFig. 9の角度 $\theta$ の時間変化は、一見Fig. 6の上下の単振動に似ているように見えるが、3周期ごとに振幅が大中小と変化する変調成分が見られる。詳しく周波数成分を調べると、先の1.35Hzはほとんど見られず、0.35Hz、0.94Hz（最大）および2.22Hzの周波数が多く含まれている。

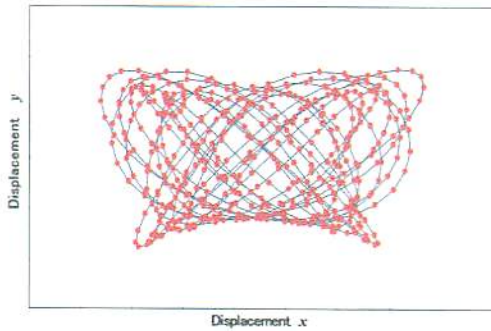


Fig. 8 The path of the spring pendulum

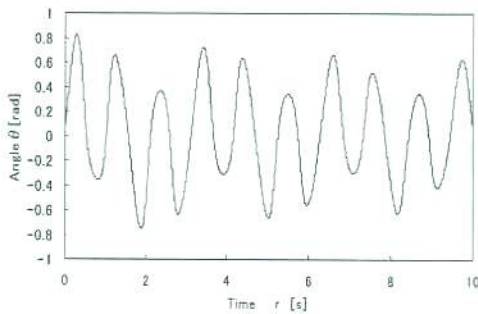


Fig. 9 The change in time of the angle on the spring pendulum

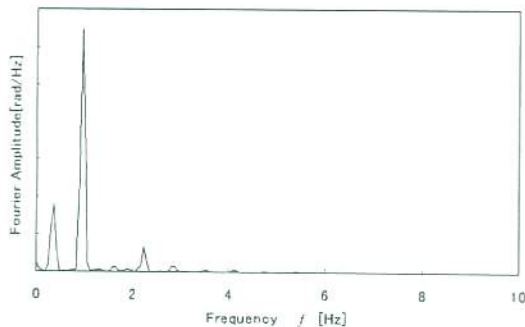


Fig. 10 Frequency analysis of the spring pendulum

Fig. 4(a)のようにおもりをつり下げたとき、ばね振り子の長さ（＝定常長） $l$ は(6)式から

$$l = l_0 + \frac{mg}{k} = 0.14 + \frac{8.0 \times 10^{-2} \times 9.8}{5.6} = 0.28(\text{m})$$

となる。ここで糸の長さの変化しない単振り子と考えた時、その周期 $T$  および周波数 $f$ は(2)式から

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0.28}{9.8}} = 1.06(\text{s})$$

$$f = \frac{1}{T} = 0.94(\text{Hz})$$

となる。したがってFig. 10で最大の周波数0.94Hzは、ばね振り子の単振り子としての性質によるものと考えられる。また周波数0.35Hzと2.22Hzについては、ばね振り子の周波数1.33Hzと単振り子の周波数0.94Hzの重ね合わせとなりと考えれば、 $1.33 \pm 0.94\text{Hz}$ であり比較的よく一致する。これよりFig. 8に見られる軌跡は、まさにばね振り子と単振り子の融合した運動の結果であると言える。

#### 4. シミュレーション

Fig. 11はシミュレーションプログラムの実行画面である。初期条件（角度、伸び等）と観察時間を入力して、実行をクリックするだけで、ばね振り子の運動を観察できるようになっている。また実際の測定との比較を考え、ばね振り子の構造的実験条件（ばね定数、おもりの質量等）を変更するだけで、実験に適応したシミュレーションを簡単に出来るように工夫してある。

シミュレーションには、Visual Basic Ver6.0を使用し、(6)～(8)式を基礎にルンゲ・クッタ法により、

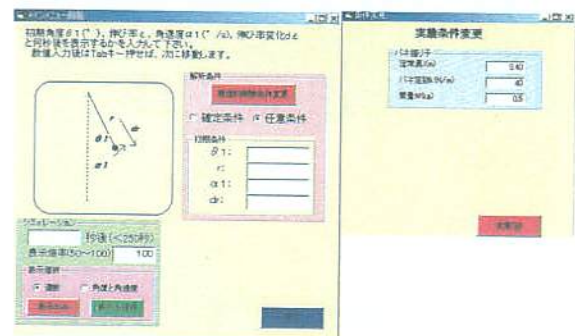


Fig. 11 Simulation program of the spring pendulum

逐次角度, 角速度, 伸び率, および伸び率の時間変化を求めた。ばね振り子の構造的実験条件は, ばね定数を  $5.6\text{N/m}$ , 自然の長さを  $0.14\text{m}$  (定常長  $0.28\text{m}$ ), おもりの質量を  $8.0 \times 10^{-2}\text{kg}$  として, シミュレーションした結果は次の通りである。

#### 4.1 鉛直

初期条件として角度  $\theta = 0^\circ$  とし, Fig. 3(b)のように鉛直上下に単振動するばね振り子の運動のシミュレーションを行った。このときのばね振り子の変位  $x$  の時間変化を Fig. 12 に, またその周波数分解した結果を Fig. 13 に示す。

これらの結果をビデオ画像位置解析法による結果 Fig. 6 および Fig. 7 と比較すると, 良い一致が見られる。また Fig. 13 より主な周波数成分は  $1.33\text{Hz}$  であり, 理論から導き出された (9) 式と完全に一致した。このような点からも, 自作したシミュレーションプログラムは, ばね振り子の運動をうまく再現できていると考えられる。

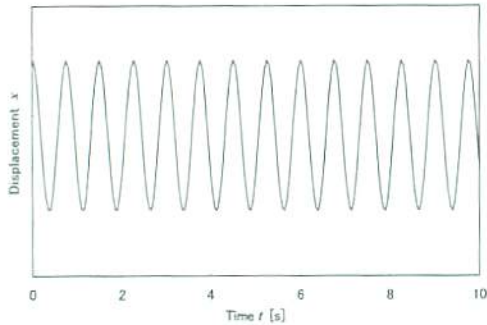


Fig. 12 The displacement of the spring pendulum (By simulation)

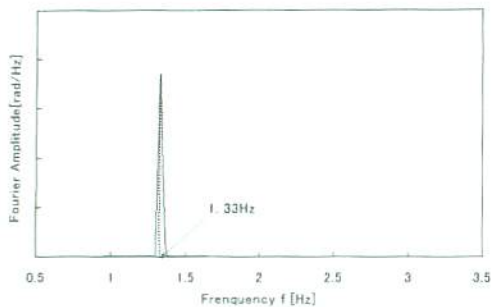


Fig. 13 Frequency analysis of the spring pendulum (By simulation)

#### 4.2 任意の角度

初期条件として角度  $\theta = 70^\circ$  とし, Fig. 4(b)のように少しばねを伸ばした状態から複雑な運動する, ばね振り子の運動のシミュレーションを行った。そのときのばね振り子の運動の軌跡を Fig. 14 に, また鉛直方向となす角度  $\theta$  の時間変化を Fig. 15 に, そして角度  $\theta$  の周波数分解した結果を Fig. 16 に示す。

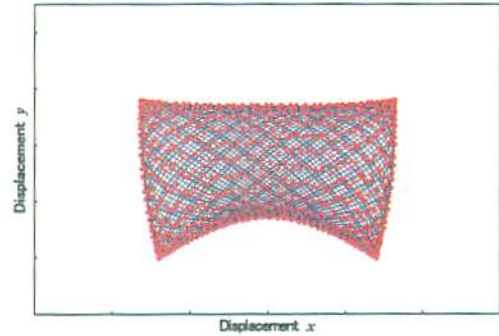


Fig. 14 The path of the spring pendulum (By simulation)

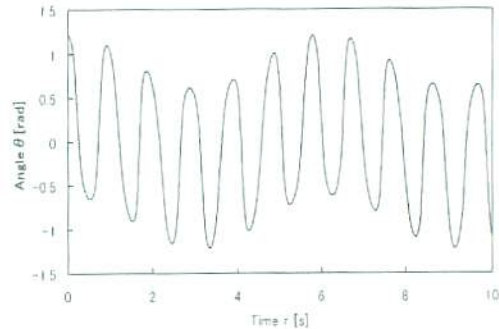


Fig. 15 The change in time of the angle on the spring pendulum (By simulation)

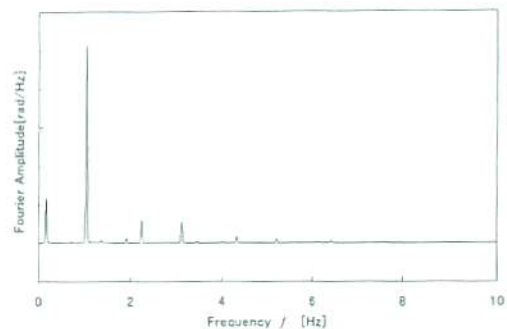


Fig. 16 Frequency analysis of the spring pendulum (By simulation)

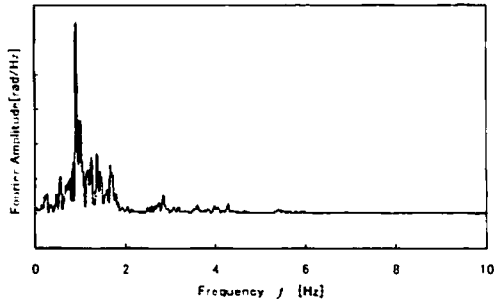


Fig. 17 Frequency analysis of the spring pendulum  
(By simulation)

これらの結果をビデオ画像位置解析法による結果 Fig. 8からFig. 10と比較すると、鉛直上下振動とは異なり、一致する点はあまり見当たらない。ばね振り子の運動の軌跡では、丸みを帯びた蝶のようなFig. 8に対して、隅々が非常に鋭角に尖っている。これはシミュレーションのようにエネルギーが保存される理想的な系であれば、左右対称に移動可能な範囲を万遍なく運動できるのに対し、実際の運動では空気抵抗や摩擦によって、振動を重ねるに従い、エネルギーが失われる。そのためばねの伸びは減少して、鋭角な部分が顕著に現れないと考えられる。より実際の運動に近づけるためには、空気抵抗や摩擦力を考慮したシミュレーションが必要であり、次の課題として取り組みたいと考えている。また周波数成分についても、ばね振り子の鉛直振動の1.33Hzがなくなる点は測定と一致するものの、他の周波数成分は0.15Hz、1.04Hz（最大）2.25Hz、3.13Hzであり、測定のようにばね振り子と単振り子の関係だけでは、十分な説明ができない。

Fig. 17は、ばね振り子の構造的実験条件を、自然の長さを0.14m（定常長0.189m）、おもりの質量を $2.8 \times 10^{-2}$ kgに変更して、初期条件として角度 $\theta = 70^\circ$ でシミュレーションした結果である。このような運動は「カオス」と呼ばれる運動であり、ばね振り子の運動は、条件次第でカオス的な運動になることがわかる。したがって、Fig. 16ではバネ振り子の運動はカオスに達していないが、カオス的な運動をしようとしているのではないかと思われる。

## 5. まとめ

鉛直上下に単振動するばね振り子の運動では、ビデオ画像位置解析法による測定と自作シミュレーションの結果は非常に良い一致が見られた。

任意の角度から振らせるばね振り子の運動では、鉛直運動のような一致はみらなかつたが、シミュレーションから構造条件次第で、より興味深いカオス現象を観察できる可能性のあることが分かった。

ばねとおもりだけの持ち運びの簡単な「ばね振り子」であるが、振らせ方によっては発展性のある教材であり、演示・授業教材として幅広い学生に使用可能な教材である。

## 6. おわり

任意の角度から振らせるばね振り子の運動については、運動方程式(7)(8)式の導出に、2次元極座標の知識が必要であり、その点から高学年もしくは専攻科生の授業教材とするのが妥当であると思われる。

低学年の学生には従来どおり単振動の実験教材として活用するが、学生に物理への興味を喚起する意味で、このような不思議なばね振り子の運動を見せることは重要である。そのため演示教材としても有効であると思われる。

## 文 献

- 1) 鈴木三男, 増田健二: 物理教育, 48 (1), 1 (2000).
- 2) 鈴木三男, 増田健二, 湊 淳, 小澤 哲: 応用物理教育, 25 (1), 3 (2001).
- 3) 鈴木三男, 布施雅彦, 湊 淳, 小澤 哲, 増田健二: 福島高専紀要, 41, 102 (2001).
- 4) 鈴木三男, 湊 淳, 小澤 哲, 増田健二: 福島高専紀要, 43, 65 (2003).