行列の分解とその応用

Matrix decomposition and its application

(平成 19 年 9 月受理)

鈴木 正樹* (SUZUKI Masaki)

Abstract

In this paper we introduce Gauss decomposition and Jacobi decomposition of matrix and apply it to pass construction of minor determinant. We give tableau representation for Macdonald's ninth variations of Schur functions by using the variable introduced by the Jacobi decomposition.

1 はじめに

行列には様々な分解方法がある。この小文では、行列のガウス分解とガウス分解の上（または下）成分をさらに細かく分解するヤコビ分解について取り上げ、それを小行列のパス構成に応用する。具体的には、マクドナルドのシューア函数第 9 変奏を一般の行列の枠組みで新しく定義し、ヤコビ分解で導入した変数を用いて、そのタブロウ表示を与える。

以下で用いる小行列式の記号を定義する。

$X=(x_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$ を $m\times n$ の行列とし、X から行の添え字 $i_1,\cdots,i_r$ と列の添え字 $j_1,\cdots,j_r$ を選んで作った $r\times r$ 行列を $X^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}$ で表す。その行列式を

$$\xi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}(X)=\det(X^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r})$$

と表す。添え字の代わりに添え字の集合を用いて書くときは、$|I|=|J|=r$ とし、I の元を $i_1<\cdots<i_r$、J の元を $j_1<\cdots<j_r$ という増大列として $\xi^I_J(X)=\xi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}(X)$ と約束する。どの行列の小行列式を考えているかが自明なときは、単に $\xi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}$ や ξ^I_J と書く。

2 行列の分解

正方行列の 2 つの分解について取り上げる。

2.1 ガウス分解

一般にガウス分解といっても対角成分の扱い方に応じて種々の方法があるが、ここでいうガウス分解は行列を対角成分がすべて 1 の下三角行列、上三角行列と対角行列の積に書き表すこととする。ガウス分解についてよく知られている定理を挙げる ([9] を参照)。

定理 1 (ガウス分解の存在と一意性の定理). $n\times n$ の正方行列 X の小行列式について

$$\xi^1_1\neq 0,\xi^{12}_{12}\neq 0,\cdots,\xi^{1\cdots n}_{1\cdots n}\neq 0$$

ならば、X は

$$X=X_-X_0X_+$$

の形に分解でき、その結果は一意的である。ここで、X_- は下三角行列で対角成分はすべて 1、X_0 は対角行列、X_+ は上三角行列で対角成分はすべて 1 の行列である。

* 福島工業高等専門学校 一般教科 (数学) (いわき市平荒川字長尾 30)

定理 2 (ガウス分解の明示公式). $n \times n$ の正方行列 X が小行列式について条件 $\xi^{1\cdots r}_{1\cdots r} \neq 0$ ($r = 1, \cdots, n$) を満たすとする。このとき、定理 1 のガウス分解を与える 3 つの行列 $X_- = (x^-_{ij})$、$X_0 = diag(x^0_1, \cdots, x^0_n)$、$X_+ = (x^+_{ij})$ の各成分は、次のように X の小行列式の比で表せる。

$$x^-_{ij(i>j)} = \frac{\xi^{1\cdots j-1 i}_{1\cdots j-1 j}}{\xi^{1\cdots j}_{1\cdots j}},\ x^0_i = \frac{\xi^{1\cdots i}_{1\cdots i}}{\xi^{1\cdots i-1}_{1\cdots i-1}},\ x^+_{ij(i<j)} = \frac{\xi^{1\cdots i-1 i}_{1\cdots i-1 j}}{\xi^{1\cdots i}_{1\cdots i}}.$$

2.2 ヤコビ分解

まず、基本ヤコビ行列を定義する。E_{ij} を行列単位 ((i,j) 成分が 1 で他の成分は 0) とし、$e_i = E_{ii+1}$ としたとき、基本ヤコビ行列 $J_i(t)$ を次のように定義する。

$$J_i(t) = 1 + te_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & t & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

対角成分がすべて 1 の上三角行列を次のように基本ヤコビ行列の積に分解することを **ヤコビ分解** という。

$$X = J_h(t) = J_{h_1}(t_1) \cdots J_{h_m}(t_m)$$

基本ヤコビ行列の並べ方は、n 次対称群の最長元 w_0 を隣接した互換の積として $w_0 = s_{h_1} \cdots s_{h_m}$ と最短表示したときに対応する添え字の列 h で指定することができる ($s_i = (ii+1)$ は隣接した互換を表す)。ここで w_0 の長さ m は対角成分がすべて 1 の上三角行列全体のなすリー群 N の次元に等しく、行列サイズを n とすると $m = \frac{n(n-1)}{2}$ である。

A. Berenstein, S. Fomin and A. Zelevinsky [1] の定理を紹介する。

定理 3 (A. Berenstein, S. Fomin and A. Zelevinsky). 上三角行列 X に対して行列 Y を次のように定義する。

$$Y = w_0^{-1}([Xw_0^{-1}]_+)^T w_0$$

ここで、w_0 は最長元に対応する置換行列。このとき X をヤコビ分解したときの要素 $t_k = t^h_k$ は次の式で与えられる。

$$t^h_k = \frac{\triangleleft^L(Y)\ \triangleleft^{L\cup\{i,j\}}(Y)}{\triangleleft^{L\cup\{i\}}(Y)\ \triangleleft^{L\cup\{j\}}(Y)}$$

集合 L と二つの整数 i, j は、任意の最短表示に対応する列 $h = (h_1, \cdots, h_m)$ と $k = 1, \cdots, m$ に対して、

$$\begin{aligned} L &= s_{h_m} \cdots s_{h_{k+1}}\{1, \cdots, h_k - 1\} \\ i &= s_{h_m} \cdots s_{h_{k+1}}(h_k) \\ j &= s_{h_m} \cdots s_{h_{k+1}}(h_k + 1) \end{aligned} \tag{1}$$

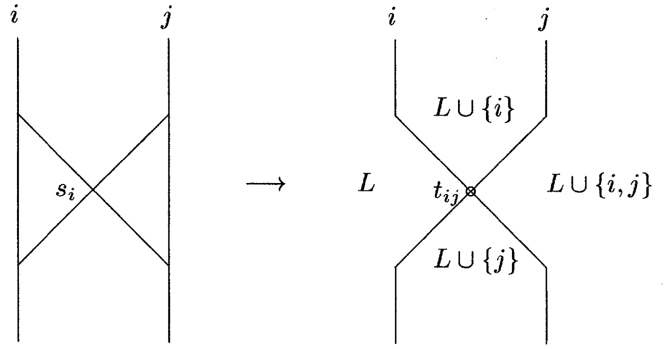
によって定義する。記号 $[X]_+$ は X のガウス分解したときの上三角部分を、X^T は X の転置行列を指す。また、$\triangleleft$ は、$J = \{j_1, \cdots, j_r\}$ が与えられたとき、X の小行列式 ξ^I_J であって、$I = \{1, \cdots, r\}$ と決めたものを、

$$\triangleleft^J(X) = \triangleleft^{j_1,\cdots,j_r}(X) = \xi^{1,\cdots,r}_{j_1,\cdots,j_r}(X) = \xi^I_J(X)$$

のように表す記号である。

[1] の論文が述べているもう一つの定理を紹介する。それは h に応じてある紐の図を描けば、(1) 式で与えられる Y の列の集合が図を見るだけでわかるというものである。

例えば、$h=(i,\cdots)$ に対して紐の図を描く。$w_0=s_h, s_i=(ii+1)$ であるので s_i は i と $i+1=:j$ のラインの間に図の左のように線を入れる。この操作を h_i の順に下から線を入れていく。紐の図を描くと必ず交点ができる。この交点のところにヤコビ分解したときの要素がのっている。



i と j のラインでできる交点にのる要素を t_{ij} とする。

t_{ij} は 4 つの部屋で囲まれており、この部屋のことを**チャンバー**という。チャンバーに図の右の要領で数字を対応させる。

L は (1) 式で定めたものであるが、次のように言い換えることもできる。

(2) $$L=L\{i,j\}=\{\ k : i \text{ と } j \text{ のラインの交点より左を通る } k \text{ のライン }\}$$

h による紐の図を描いたときできるチャンバーに対応する数字を J とし、J に対応する小行列式を M_J とする。各要素 t_{ij} は定理 3 より行列 Y の小行列式の 4 つの比で表せる。

M_J と行列 Y の小行列式の関係を述べているのが次の定理である。

定理 4 (A. Berenstein, S. Fomin and A. Zelevinsky). h による紐の図を描いたときにできるチャンバーの対応する数字を J とする。J は行列 Y の小行列式を考えるときの列の集合に対応する。

$$M_J=\triangleleft^J(Y)$$

定理 3 より、(2) 式で定義された $L=L(i,j)$ を用いて t_{ij} は次のように表される。

$$t_{ij}=\frac{M_L M_{L\cup\{i,j\}}}{M_{L\cup\{i\}}M_{L\cup\{j\}}}$$

ただし、$M_\varphi=1$ と約束する。

2.2.1 A 型ヤコビ分解

h をある形に固定したときのヤコビ分解 (A 型ヤコビ分解) について述べる。

行列 X を $(n+1)\times(n+1)$ の正方行列とする。行列 X に対してガウス分解を与え、分解した上三角行列 X_+ に着目する。ここで X_+ を改めて行列 P とおく。

h を次のように並べたものとする。

$$h=(\underbrace{n,n-1,\cdots,1}_{n},\underbrace{n,n-1,\cdots,2}_{n-1},\cdots,\underbrace{n,n-1}_{2},\underbrace{n}_{1})$$

h は $w_0=s_h$ を満たす。P の h によるヤコビ分解は次のようになる。

$$P=J_h(t)=\begin{pmatrix}1 & t_n & & & \\ & 1 & t_{n-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & t_1 \\ & & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & & & \\ & 1 & t_{2n-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & t_{n+1} \\ & & & & 1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1 & 0 & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & t_m \\ & & & & 1\end{pmatrix}$$

変数 $t_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ がどの行列のどの行に対応するか明確にするため変数 u_j^i を用いて次のように表す。

$$\begin{aligned} P &= U_1U_2\cdots U_n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & u_1^1 & & & \\ & 1 & u_2^1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & u_n^1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ & 1 & u_2^2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & u_n^2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & u_n^n \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

各行列の u_j^i 成分の上の添え字は U_i の行列の成分であることを、下の添え字は、その行列の j 行目の成分であることを表す。この行列の分解 P を **A 型ヤコビ分解** という。次のことが成り立つ。

補題 1 (A 型ヤコビ分解). $P = (p_{ij})_{ij}$ を $(n+1)\times(n+1)$ の上三角行列 (対角成分はすべて 1) とする。P の小行列式について

$$\triangleleft^{[i,j]} \neq 0 \quad (i \leqslant j), \quad [i,j] = \{i, i+1, \cdots, j-1, j\}$$

ならば P は $(n+1)\times(n+1)$ の上三角行列 (対角成分はすべて 1) で上二重対角成分の i 列目から n 列目まで要素が詰まっているだけでその他の成分は 0 である行列 U_i を用いて

$$P = U_1U_2\cdots U_n$$

の形に分解でき、この分解の結果は一意的である。

3 シューア函数

既によく知られているシューア函数の定義を簡単に確認する。

シューア函数は、N 個の変数 $x = (x_1, \cdots, x_N)$ と $l(\lambda) \leqslant N$ なる任意の分割 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ に対して定義される x の対称多項式であり、次のような行列式の比として定義される (ワイルの公式)。

$$s_\lambda(x) = \frac{\det(x_i^{\lambda_j+N-j})_{1\leqslant i,j\leqslant N}}{\det(x_i^{N-j})_{1\leqslant i,j\leqslant N}}$$

また、シューア函数 s_λ は、次のように k 次の完全同次対称式 h_k を用いた行列式でも表せることが知られていて、この式はヤコビ-トゥルーディ公式と呼ばれている。

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1\leqslant i,j\leqslant N},$$

$$h_k(x_1, \cdots, x_N) = s_{(k,0,\cdots,0)}(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{l_1+\cdots+l_N=k, l_j\geqslant 0} x_1^{l_1}\cdots x_N^{l_N}$$

さらに、s_λ は、シューア函数のタブロウ表示と呼ばれる次のような単項式の非負整数係数の一次結合として表すこともできる。

$$s_\lambda = \sum_{T\in SSTab_N(\lambda)} x^T$$

$SSTab_k(\lambda)$ の元 T (これを**タブロウ**という) はヤング図形 λ のそれぞれの箱に 1 から k までの自然数の 1 つを右に非減少、下に増大になるようにいれたものであり、x^T とは次の関係式を満たすものである。

$$x^T = \prod_{i=1}^{k} (x_i)^{\mu_i} \qquad \mu_i \text{ は } T \text{ に含まれる } i \text{ の個数}$$

ここで、ワイルの公式に着目すると、シューア函数は、行列 $X = (x_i^{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ を用いて、次のように表すことができる。

$$s_\lambda(x) = \frac{\xi^{1\cdots N}_{j_1\cdots j_N}(X)}{\xi^{1\cdots N}_{1\cdots N}(X)} \;\; (j_\mu = \lambda_{n-\mu+1} + \mu).$$

3.1 シューア函数第 9 変奏のヤコビ-トゥルーディ公式

シューア函数第 9 変奏にあたる $S_\lambda^{(r)}$ を定義し、ヤコビ-トゥルーディ公式を紹介する。

X を一般の $n \times n$ の行列 $X = (x_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ とする。$l(\lambda) \leqslant r$ なる分割 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ が与えられたとき $1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_r \leqslant n$ を $\lambda_i = j_{r+1-i} - (r+1-i)$ で定め、X を用いて新しく $S_\lambda^{(r)}$ を次のように定義する。

$$S_\lambda^{(r)} = \frac{\xi_{j_1 \cdots j_r}^{1 \cdots r}(X)}{\xi_{1 \cdots r}^{1 \cdots r}(X)}$$

ここで

$$h_k^{(r)} = S_{(k)}^{(r)} = \frac{\xi_{1 \cdots r-1 r+k}^{1 \cdots r}(X)}{\xi_{1 \cdots r}^{1 \cdots r}(X)}$$

とおくと、次の定理が成り立つ。

定理 5 (ヤコビ-トゥルーディ公式 (シューア函数第 9 変奏)).

$$S_\lambda^{(r)} = \det(h_{\lambda_i - i + j}^{(r+1-j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$$

が成り立つ。

マクドナルドはこの公式によってシューア函数第 9 変奏を定義している。

4 主結果

以下では、$S_\lambda^{(r)}$ を A 型ヤコビ分解によって導入された変数 u_j^i を用いて表す公式 (主定理 1) を導く (例を用いて紹介する)。ここで与えるパスを用いた公式は、タブロウ表示 (主定理 2) と本質的に等価である。

4.1 シューア函数第 9 変奏のパス構成

最初にパスの定義をする。

定義 1 (パスの定義). $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}, 1 \leqslant k \leqslant n$ に対して集合 $\mathcal{I}_k$ を以下のように定義する。

$$\mathcal{I}_k = \{\{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\} | 1 \leqslant i_l \leqslant n\}$$

$I, J \in \mathcal{I}_k$ のとき、$P_m(I, J)$ を次のように定義する。

$$P_m(I,J) = \{(I_0, I_1, \cdots, I_m) \in \mathcal{I}_k^{m+1} | I_0 = I, I_m = J, I_l \swarrow I_{l+1} (0 \leqslant \forall l \leqslant m-1)\}$$

記号 $\swarrow$ の定義は次の通りである。$I = \{i_1, \cdots, i_k\}, J = \{j_1, \cdots, j_k\} \in \mathcal{I}$ のとき

$$I \swarrow J \Leftrightarrow i_l = j_l \ or \ i_l = j_l - 1 \ (1 \leqslant \forall l \leqslant k).$$

次の定理が成り立つ。

主定理 1 (シューア函数第 9 変奏のパスによる表示). X を $n \times n$ 行列、行列 P をそのガウス分解の上三角行列 (対角成分はすべて 1) とする。$I = \{1, \cdots, r\}, J = \{j_1, \cdots, j_r\}$ のとき次の関係式が成り立つ。

$$S_\lambda^{(r)} = \frac{\xi_J^I(X)}{\xi_I^I(X)} = \xi_J^I(P) = \sum_{p \in P_{n-1}(I,J)} \prod_{(i,j) \in p} u_j^i$$

ここで、$(i,j) \in p$ は $I_{i-1} \ni j$ かつ $I_i \ni j+1$, すなわちパスの言葉では、I_i から I_{i-1} に下るステップで左から j 番目の斜めの線を通過したことを表す。

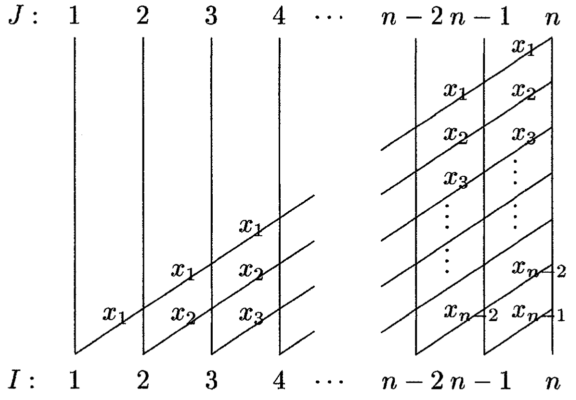
<u>例</u>

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = (x_i^{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

をガウス分解した上三角行列を P とする。この P を A 型ヤコビ分解すると次のようになる。

$$P=\begin{pmatrix}1 & x_1 & & & \\ & 1 & x_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & x_{n-1}\\ & & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & & & \\ & 1 & x_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & x_{n-2}\\ & & & & 1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & x_1\\ & & & & 1\end{pmatrix}$$

P の小行列式を考える時に用いるパスの図は次のようになる。



例えば、$I=\{1,2\}, J=\{2,4\}$ としたときの J から I へのパスは、
$J:2\to I:1$ を通る x_1
$J:4\to I:2$ を通る x_1x_2 と x_2x_2
の 2 通り考えられるので、
$\xi_{24}^{12}=x_1^2x_2+x_1x_2^2$ となる。

4.2 シューア函数第 9 変奏のタブロウ構成

パスとタブロウの対応付けを与える。

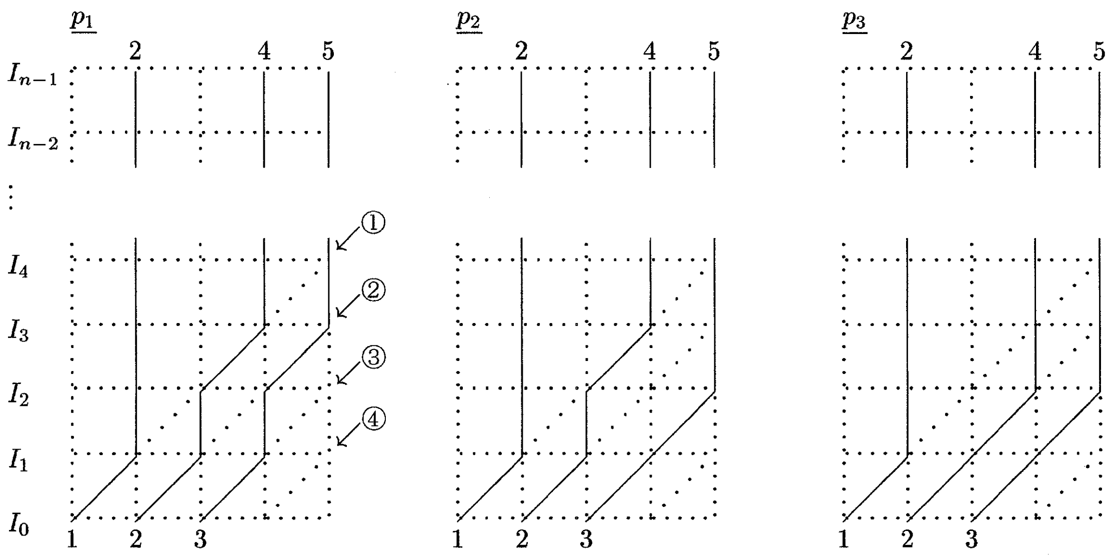
u_j^i が乗っているラインのラベルを $j-i+1$ で定める。このラベルを用いて、パスとタブロウの対応を次のルールで与える。

(a) パスの各ラインに対し、それが通過している斜めのラインのラベルを下から順に読み、列を作る。

(b) パスの右から順にみた各ラインについて、(a) で作った対応する列を上から順に並べる。

例を用いて説明する。

$I=\{1,2,3\}, J=\{2,4,5\}$ としたときの $P_{n-1}(I,J)$ を考える。$P_{n-1}(I,J)$ の元 p の中で、実際に $\xi_{j_1\cdots j_r}^{1\cdots r}(P)$ の値として関わるパスは 3 つで、$p_1,p_2,p_3\in P_{n-1}(I,J)$ を図で表すと次のようになる。



パスをタブロウに対応させたものを $\tilde{T}$ とすると各 P_i のパスを表す $\tilde{T}_i$ は次のようになる。

$$\tilde{T}_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \tilde{T}_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \tilde{T}_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

このタブロウ $\tilde{T}$ は台が $\lambda=(2,2,1)$ のヤング図形に $1,2,3$ の数字を右に非増大 $((a))$、下に減少 $((b)$ 及び各ラインは交わらない) となるようにいれたものになり、通常のタブロウを定義するときの数字の大小関係とは異なる。そこで次のように数字を読みかえる。$r+1$ (この例では 4) から各箱の数字を引くと $SSTab(\lambda)$ の定義と合う。それは次のようなものになる。

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad T_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad T_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

各 T_i は $\lambda=(2,2,1)$ のときの $SSTab_3(\lambda)$ の元であり、さらにその元の個数は 0 でない値を与えるパスの数とも一致する。一般に次のことがいえる。

各パスに対して、ルール (a)、(b) で定まるものを $\tilde{T}_k$ とし、$\tilde{T}_k$ の x 行目 y 列目の箱に対応する数字を $\tilde{T}_k(x,y)$ とする。このとき、次の $T_k(x,y)$ で与えられる T_k は $SSTab_r(\lambda)$ の元となる。

(3)
$$T_k(x,y) = r+1-\tilde{T}_k(x,y)$$

では、台 λ のヤング図形が与えられたときパスに対応させずに $S_\lambda^{(r)}$ を与えるにはどのようにすればよいか、再び例で考察する。

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline u_3^1 & u_4^3 \\ \hline u_2^1 & u_3^3 \\ \hline u_1^1 & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

p_1 のパスに対応するタブロウを u_j^i の要素を含めて表すと左のようになる。u_j^i の下の添え字 j に着目すると、

(4)
$$j = j(x,y) = r-x+y$$

となっている。これは各ラインが J から I へ行くときに斜めには 1 つずつしか進めないことからいえる。

さらに先ほど与えた $\tilde{T}$ の x 行目 y 列目に対応する $\tilde{T}_k(x,y)$ の数字は、ラインのラベルと対応させていたものなので $\tilde{T}=j(x,y)-i(x,y)+1$ である。よって (3) 式と (4) 式より u_j^i の上の添え字は、

$$i(x,y) = T_k(x,y)-x+y$$

で与えられる。以上より、次の定理が成り立つ。

主定理 2 (シューア函数第 9 変奏のタブロウによる表示). $l(\lambda) \leqslant r$ なる分割 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ が与えられたとき、台が λ のタブロウ T の x 行 y 列の要素を $T(x,y)$ とする。このとき、次の関係式が成り立つ。

$$S_\lambda^{(r)} = \sum_{T\in SSTab_r(\lambda)} \prod_{(x,y)} u_j^i$$

$$\begin{cases} i = i(x,y) = T(x,y)-x+y \\ j = j(x,y) = r-x+y. \end{cases}$$

この定理の表示は、特殊化すると通常のシューア函数のタブロウ表示にできる。$u_j^i = x_{j-i+1}$ であるので、

$$S_\lambda^{(r)} = \sum_{T \in SSTab_r(\lambda)} \prod_{(x,y)} u_j^i = \sum_{T \in SSTab_r(\lambda)} \prod_{(x,y)} x_{r+1-T(x,y)} = s_\lambda(x_r, x_{r-1}, \cdots, x_1) = s_\lambda(x_1, \cdots, x_r)$$

となる。よって、$X = (x_i^{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ のとき、

$$S_\lambda^{(r)} = \sum_{T \in SSTab_r(\lambda)} x^T = s_\lambda(x_1, \cdots, x_r)$$

が成り立つ。

以上より、シューア函数第9変奏について、従来のシューア函数と同様にタブロウ構成ができることが示せた。

参考文献

[1] A. Berenstein, S. Fomin and A. Zelevinsky. Parametrizations of canonical bases and totally positive Matrices. Adv. in Math. **122** (1996), 49–149.

[2] V.V. Bazhanov and N.Y. Reshetikhin. Scattering amplitudes in offcritical models and RSOS integrable models. Funkcial. Ekvac. **45** (2002), 237–258.

[3] W. Fulton. Young Tableaux, London Mathematical Society Student Texts 35, . Cambridge University Press, New York, (1997).

[4] I. Gessel and G. Viennot. Binomial determinants, paths, and hook length formulas. Adv. in Math. **58** (1985), 300–321.

[5] I.G. Macdonald. Schur functions : Theme and variations. Publ.I.R.M.A. Strasbourg, Acte 28^e, Séminaire Lotharingien, (1992),5– 39.

[6] I.G. Macdonald. Symmetric Functions and hall Polynomials, Second Edition. Oxford University Press, (1995).

[7] J. Nakagawa, M. Noumi, M. Shirakawa and Y. Yamada. Tableau representation for Macdonald's ninth variation of Schur functions. Physics and combinatorics, Nagoya (2000), 180–195.

[8] Y. Yamada. A birational representation of Weyl group, combinatorial R-matrix and discrete Toda equation. Physics and combinatorics, Nagoya (2000), 305–319.

[9] 野海正俊. パンルヴェ方程式 –対称性からの入門–. 朝倉書店, (2000).