

サイクロイド振子について

On Cycloidal Pendulum

井川 治* (IKAWA Osamu)

大澤 昇平** (OSAWA Shohei)

Abstract The motion of a particle on a cycloid under the uniform gravity is called the cycloidal pendulum. We study the cycloidal pendulum, and compare it with the circular pendulum.

Keywords cycloidal pendulum, circular pendulum

1 導入

円が、与えられた直線上を滑ることなく転がるとき、この円状の定点が描く軌跡をサイクロイドという。本稿の目的は、サイクロイド斜面上に一様な重力場がかかっているとき、斜面上に質点を置き、手を離れたときの質点の運動を調べ、その結果を利用して、サイクロイド振子と円振子に関するシミュレータを作成し結果を比較することである。

ここで、サイクロイド軌道上の質点の運動は、周期運動となるが、その周期は、初期位置によらず一定であるという特殊な性質を持つ。この等時性は、普通の円振子に対しても近似的には成立する。

2 サイクロイド軌道上の質点の力学的性質

半径 a の円が、与えられた直線上を滑ることなく転がるとき、この円上の定点が描く軌跡をサイクロイドという。定点が原点 $(0, 0)$ を出発して、直線 $y = 2a$ 上を転がったときの円の回転角を ξ とすると、曲線は次のように表示される。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \left(\begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \xi \\ -\cos \xi \end{pmatrix} \right) \quad (-\pi < \xi < \pi) \quad (1)$$

これを図示すると以下のようなになる。

本稿で全体を通して扱う系においては、重力加速度 $(0, -g)$ が一様にかかっていると考える。ここで、サイクロイド軌道上の質点の運動は、周期運動となるが、その周期 T は、初期位置によらず一定であるという特殊な性質を持つ（等時性、(6) 式を参照）。

この等時性は、普通の円振子に対しても近似的には成立する。実際、周期 T は、糸の長さ l と重力加速度 g を用いて $T \cong 2\pi\sqrt{l/g}$ と表される。この事実は、ガリレオ・ガリレイによって発見されたものである。ただし、これは円振子の振幅が小さい場合に限ったことであり、振幅が大きい場合は、小さい場合と比べて周期は長くなってしまふ。この事実に対しホイヘンスは、サイクロイドを考案し、その等時性を発見した ([1] 参照)。

*福島工業高等専門学校 一般教科

Department of General Education, Fukushima National College of Technology,
Iwaki, Fukushima, 970-8034, Japan

**福島工業高等専門学校 電気工学科

Department of Electrical Engineering, Fukushima National College of Technology,
Iwaki, Fukushima, 970-8034, Japan

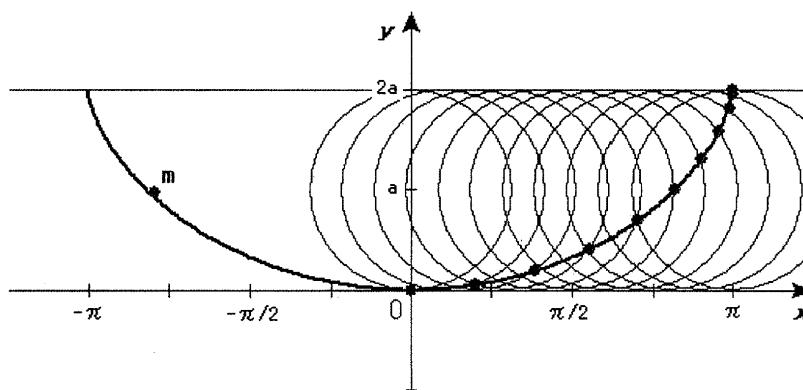


図 1: サイクロイド曲線

本稿の目的は (1) によって定義されるサイクロイド斜面に一樣な重力場 $(0, -g)$ がかかっているとき、斜面上に質点をおき、手を離れたときの質点の運動 $\xi(t)$ を調べ、その結果を利用して、サイクロイド振子と円振子に関するシミュレータを作成し結果を比較することである。

まず、質点の運動方程式について考察する。単位質量当たりの質点の位置エネルギーは

$$(0 \leq) gy = ga(1 - \cos \xi) (\leq 2ag).$$

また、

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = a\dot{\xi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \xi \\ \sin \xi \end{pmatrix}.$$

であるから、単位質量当たりの質点の運動エネルギーは

$$(0 \leq) \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = a^2(\dot{\xi})^2(1 + \cos \xi).$$

よって系のラグランジアン \mathcal{L} は

$$\mathcal{L}(\xi, \dot{\xi}) = a^2(\dot{\xi})^2(1 + \cos \xi) - ga(1 - \cos \xi)$$

によって定義される相空間上の関数である。ゆえに質点の運動方程式 $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}$ より次を得る。

$$2a\ddot{\xi}(1 + \cos \xi) = a(\dot{\xi})^2 \sin \xi - g \sin \xi. \quad (2)$$

また、力学的エネルギー保存則より、次式が成立する。

$$0 \leq \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + gy \right) = a(\dot{\xi})^2(1 + \cos \xi) + g(1 - \cos \xi) = E(\text{定数}). \quad (3)$$

E は単位質量当たりの力学的エネルギーを a で割ったものである。 $E = 0$ となるための条件は $(x, y) = 0$ で、質点は静止していることである。また、 $E \leq 2g$ が成り立つ。ここで、 $E = 2g$ のときと、 $E < 2g$ のときとは、運動の様子が大きく異なるので、 E を場合分けすることにする。

$E = 2g$ のとき、

$$a(\dot{\xi})^2(1 + \cos \xi) + g(1 - \cos \xi) = 2g.$$

変形すると $\{a(\dot{\xi})^2 - g\}(1 + \cos \xi) = 0$ となるので

$$\dot{\xi} = \pm \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

任意の解は原点を通るので、以下、初期条件として $t = 0$ のとき $\xi = 0$ と仮定する。 $\xi(t)$ が運動方程式 (2) の解ならば、 $\xi(-t)$ も (2) の解なので、以下、 $\xi(t)$ または $\xi(-t)$ のどちらか一方のみを表示する。 $\dot{\xi} = \sqrt{g/a}$ のときは、 $\xi = t\sqrt{g/a}$ を得る。

$0 < E < 2g$ のとき $a(\dot{\xi})^2(1 + \cos \xi) + g(1 - \cos \xi) < 2g$ を変形すると $\{a(\dot{\xi})^2 - g\}(1 + \cos \xi) < 0$ となるので

$$|\dot{\xi}| < \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

(3) を $\dot{\xi}$ について解くと、

$$\dot{\xi} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{E - g(1 - \cos \xi)}{1 + \cos \xi}}.$$

この $\xi(t)$ に関する変数分離形の微分方程式を解くと

$$\frac{t}{\sqrt{a}} = \int \sqrt{\frac{1 + \cos \xi}{E - g(1 - \cos \xi)}} d\xi = \sqrt{2} \int \frac{\cos \frac{\xi}{2}}{\sqrt{E - 2g \sin^2 \frac{\xi}{2}}} d\xi = \frac{2}{\sqrt{g}} \operatorname{Arcsin} \left(\sqrt{\frac{2g}{E}} \sin \frac{\xi}{2} \right). \quad (4)$$

これを整理して、

$$\sin \frac{\xi}{2} = \sqrt{\frac{E}{2g}} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}} t \right). \quad (5)$$

この関係式は $E = 0$ 及び $E = 2g$ の場合も含めて成立する。

これを図示すると、下図のようになる。

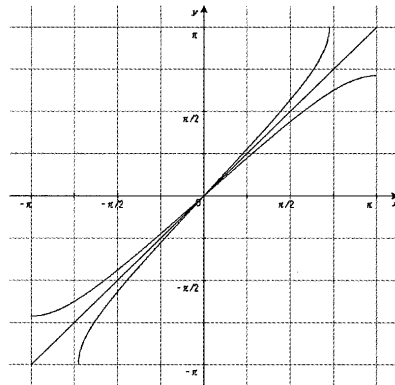


図 2: t と ξ の関係

質点の運動の周期 T は明らかに、質点が原点から最高点に達するまでの時間の 4 倍に等しい。従って、(4) より、

$$\frac{T}{4} = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{Arcsin} \left(\sqrt{\frac{2g}{E}} \sin \frac{\xi_0}{2} \right) = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{Arcsin} 1 = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

ただし, ξ_0 は

$$E = g(1 - \cos \xi_0) = 2g \sin^2 \frac{\xi_0}{2}$$

という関係式により定義される数である. 従って,

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (6)$$

以上のことから, 次の定理が得られる.

定理 1 一様な重力場 g 内で, (1) によって与えられるサイクロイド上を束縛運動する質点の運動について, 次が成り立つ. 単位質量当たりの力学的エネルギーを a で割ったものを $E \geq 0$ とおく.

$$\xi(t) = 2\text{Arcsin}(\kappa \sin \omega t).$$

但し, $\kappa = \sqrt{E/2g}$, $\omega = (1/2)\sqrt{g/a}$ と置く.

$0 < \kappa \leq 1$ のとき, 質点の運動は周期 $T = 2\pi/\omega$ の周期運動である.

以下, ハミルトン力学的手法で解析を行うこととする. 質点の運動に関するハミルトニアン $H(\xi, \dot{\xi})$ は,

$$H(\xi, \dot{\xi}) = a(\dot{\xi})^2(1 + \cos \xi) + g(1 - \cos \xi)$$

によって定義される相空間上の関数である.

サイクロイド曲線 M の相空間 $T(M)$ 上の関数 $H(\xi, \eta)$ に対して, H の Hamilton ベクトル場 X_H を

$$X_H = \frac{1}{2a(1 + \cos \xi)} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta}, -\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)$$

と定める. $T(M)$ 内の曲線 $u(t) = (\xi(t), \dot{\xi}(t))$ が Hamilton 方程式 $\dot{u} = X_H$ を満たせば, $\xi(t)$ は運動方程式 (2) を満たす. 逆に, (2) の解 $\xi(t)$ に対して $T(M)$ 内の曲線 $u(t)$ を $u(t) = (\xi(t), \dot{\xi}(t))$ と定めると, $u(t)$ は Hamilton 方程式 $\dot{u} = X_H$ を満たす.

$H(\xi, \dot{\xi}) = E_0$ のグラフとベクトル場 X_H を以下に図示する.

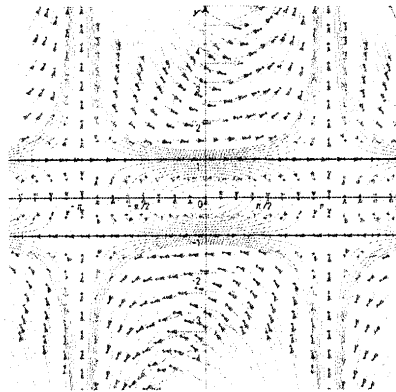


図 3: $H(\xi, \dot{\xi}) = E_0$ のグラフとベクトル場 X_H

このグラフを注意深く観察すると, サイクロイド振子が動く様子が読み取れる. 特に $H = 2g$ である場合, 解は $\dot{\xi} = \pm 1$ となる.

また, $X_H = 0$ である場合, 解は $\dot{\xi} = 0$, $\sin \xi = 0$ である.

3 シミュレータの開発

本研究に際し、我々は、サイクロイド振子の等時性を確認するためのシミュレータを開発した（下図）。本シミュレータには、サイクロイド振子と円振子という 2 種類の振子のシミュレータが内蔵されている。このそれぞれの振る舞いを観察し、比較することによって、サイクロイド振子の特徴、特に等時性が確認できるという効果が得られると考えられる。

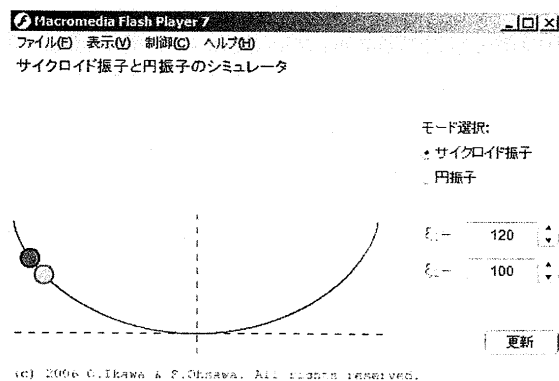


図 4: サイクロイド振子のシミュレータ

本シミュレータの特徴として、操作が非常に簡単であるという点が挙げられる。また、円振子のシミュレーションにおいて、等時性が次第にずれる様子は興味深い。なお、サイクロイド振子のシミュレーションは本稿に基づくものであるが、円振子のシミュレーションは、厳密に解析しようとすると煩雑になるため、ルンゲ・クッタ法による近似を用いた。

本シミュレータは、次の URI にアクセスすることで、実際に閲覧及びダウンロードすることが可能である：<http://simfan.cn1.jp/pendulum/>

参考文献

- [1] 梅原雅顕，山田光太郎共著，曲線と曲面—微分幾何的アプローチ—，裳華房（2002年）
- [2] ランダウ，リフシツ共著，力学，東京図書（1971年）
- [3] <http://kaiha.jp/>
- [4] <http://www12.plala.or.jp/ksp/>