

一般化高次理論に基づくはりの精密化有限要素法

Refined Finite Element Method based on General Higher Order Beam Theory

根岸 嘉和* (NEGISHI Yoshikazu)

Abstract

In this paper, we develop a refined Finite Element Method (FEM) to analyze beam bending problem based on our General Higher Order Beam Theory proposed previously.

This FEM is established by considering higher order transverse distribution of displacements in beam bending to make possibility exact analysis of displacements and stresses.

The accuracy of present finite element method is examined synthetically by the analysis of beam bending problems of simply supported beam under uniformly distributed load. By this development of refined FEM, a refinement to FEM based on the classical beam theory or shear deformation beam theories and the usefulness of our General Higher Order Beam Theory are established simultaneously.

1. 緒言

本研究は、著者らが先に提案したはりの解析に関する一般化高次理論¹⁾の考え方を、有限要素法に用いた数値解析法の構築によって、はりの曲げならびに伸縮問題の有限要素解析の精密化と一般化高次理論²⁾の有用性の拡大を目指すものである。

ここでは2次元はりの変位成分を高さ方向座標のベキ級数で展開仮定する手法に基づく有限要素法³⁾⁻⁸⁾を構築し、曲げに伴う伸縮挙動も考慮した一般的はり曲げの解析を通じて、高次理論要素の精度を検証する。

2. 一般化高次理論

図-1に示す座標系で、はり(均質等方性)の境界面に分布荷重 $p(x)$ を载荷した問題に関して、本有限要素法の基盤となる一般化高次理論¹⁾(GHT)の概要を示す。

はりの変位成分 $u_i; i = x, z$ (x, z 以外の添字は座標 x, z を表す) を次式のように高さ方向座標 z のベキ級数 (N : 理論次数) で展開仮定する。

$$u_i = \sum_{n=0}^{2N-1} z^n u_{i(n)}(x) \quad (1)$$

ここに $u_{i(n)}$ は変位係数と呼ばれ、変位の軸方向分布を表す関数である。

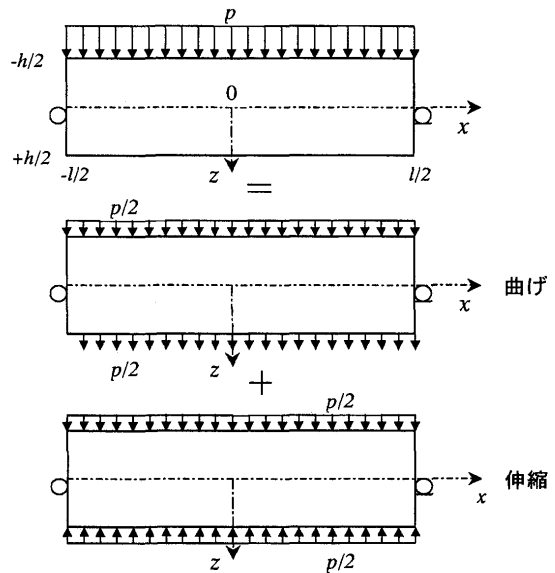


図-1 座標系とはりの曲げ挙動・伸縮挙動

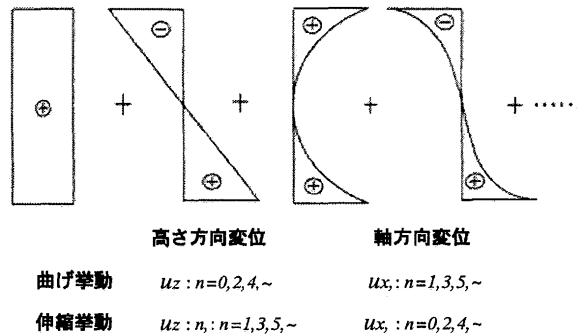


図-2 変位係数 $u_{i(n)}$ の高さ方向分布

* 福島工業高等専門学校 建設環境工学科(いわき市平上荒川字長尾 30)

2次元弾性論⁹⁾の幾何学的関係式を用い、はりのひずみ成分 $\varepsilon_{ij} ; i, j = x \text{ or } z$ が次式のように得られる。

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} = \sum_{n=0}^{2N-1} z^n \{ (\delta_{ix} u_{j(n),x} + \delta_{jx} u_{i(n),x}) / 2 + (n+1)(\delta_{iz} u_{j(n+1)} + \delta_{jz} u_{i(n+1)}) / 2 \} \quad (2)$$

上式中の δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、 x, z 以外の繰り返される添字はテンソル表記法の総和規約に従う。また、添字 (x) は x 座標による微分を表す。

構成関係式を用いれば、 C_{ijkl} を剛性係数としてはりの応力成分 $\sigma_{ij} ; i, j = x \text{ or } z$ を変位係数 $u_{j(n)}$ で表した次式が得られる。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sum_{n=0}^{2N-1} z^n \{ C_{ijkx} u_{k(n),x} + (n+1) C_{ijkz} u_{k(n+1)} \} \quad (3)$$

これらのひずみ成分・応力成分を変分原理に用いれば、変位係数の支配方程式が、次式の高次断面力のつり合い方程式として、境界条件式とともに導かれる。

$$\sigma_{ix,x}^{(n)} - n \sigma_{iz}^{(n-1)} + F_i^{(n)} = 0 \quad (4)$$

上式の各項は次の高次断面力 $\sigma_{ij}^{(n)}$ と荷重項 $F_i^{(n)}$ である。

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z^n dz, \quad F_i^{(n)} = \left[\sigma_{zi} z^n \right]_{z=-h/2}^{z=h/2} \quad (5)$$

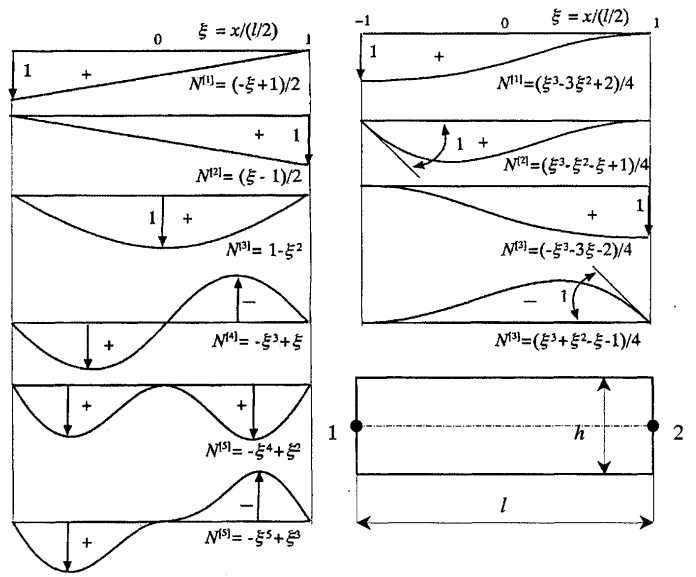
3. 精密化有限要素法の構築

1) 節点変位係数を直接未知量とする要素

はり要素 (2 節点) の変位成分 $u_i ; i = x, z$ を、高さ方向には図-2 のように z のべき乗 z^n で展開仮定すると共に、長さ方向には図-3 に示す各種の多項式群 $N^{[m]}(\xi); \xi = x/(l/2); m=1 \sim M$ を変位係数関数 (通常の変位関数に相当) として採用し、節点変位係数 (および無節点変位係数) $u_{i(n)}^{[m]}$ との積で次式のように仮定する。

$$u_i = \sum_{n=0}^{2N-1} z^n u_{i(n)}(x) = \sum_{n=0}^{2N-1} z^n \sum_{m=1}^M u_{i(n)}^{[m]} N^{[m]}(\xi) \quad (6)$$

図-3 に、ここで開発した各種の有限要素法で用いた



C⁰ 連続性関数 C¹ 連続性関数

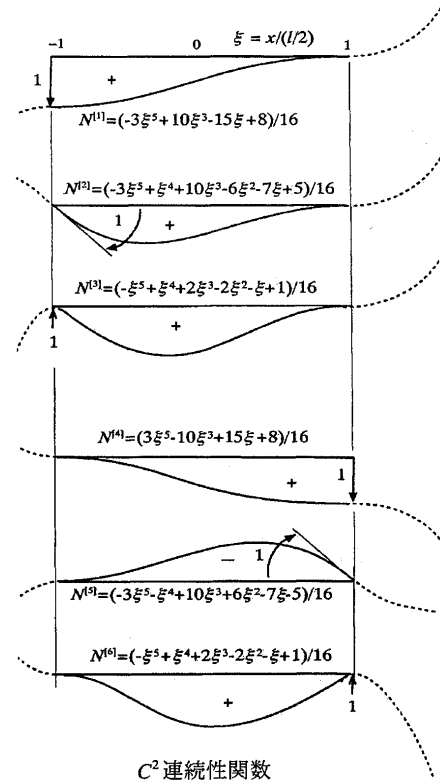


図-3 変位係数関数 $N^{[m]}(\xi); \xi = x/(l/2)$ の軸方向分布

変位係数関数を示したが、これらは節点における要素間の変位係数関数の連続性より、以下のように分類される関数群である。

① C⁰ 連続性関数：0階微係数連続性 (値のみの連続性) を示す関数群、すなわち要素両端の節点でそれぞれ 1-0, 0-1 となる直線変化 ($m=1, 2$) を最低次分布とし、これに両節点で 0 となる無節点高次成分 ($m =$

3～6：2次～5次分布）を順次重ね合わせたもの。

② C^1 連続性関数：1階微係数連続性（値、傾きの連続性）を有する4種の3次関数

③ C^2 連続性関数：2階微係数連続性（値、傾きおよび曲率の連続性）を有する6種の5次関数

これらの変位係数関数による解の精度特性についても、数値例を通じて検証する。

式(6)の変位成分の一般式をマトリックス表示すると次式のようになる。

$$\{u\}=[N]\{\delta\} \quad (7)$$

$\{\delta\}$ ははり要素の2節点での節点変位係数（および C^0 連続性要素では各要素内での無節点変位係数） $u_{i(n)}^{[m]}$ よりなる次式の変位係数ベクトルである。

$$\{\delta\} = \sum_{n=0}^{2N-1} \sum_{m=1}^M \{u_{z(n)}^{[m]}; u_{x(n)}^{[m]}\} \quad (8)$$

幾何学的関係式より、ひずみベクトル $\{\epsilon\}$ は次式で求められる。

$$\{\epsilon\}=[N']\{\delta\} \quad (9)$$

構成関係式より、応力ベクトル $\{\sigma\}$ は剛性係数マトリックス $[D]$ を用いて次式で求められる。

$$\{\sigma\}=[D]\{\epsilon\}=[D][N']\{\delta\} \quad (10)$$

他方、変位係数ベクトルの成分 $u_{i(n)}^{[m]}$ に対応した節点

カベクトル $\{f\}$ の成分 $f_{i(n)}^{[m]}$ は次式で求められる。

$$f_{i(n)}^{[m]} = \int_{-1/2}^{1/2} [p(x)z^n N^{[m]}(\xi)]_{z=-h/2}^{z=+h/2} dx \quad (11)$$

これらを用い、次の仮想仕事の原理より、

$$\{f\}^T d\{\delta\} = \int [D] d[\epsilon] dV = [k] \{\delta\} d\{\delta\} \quad (12)$$

次式の剛性方程式が導かれる。

$$\{f\}=[k]\{\delta\} \quad (13)$$

なお要素剛性マトリックス $[k]$ は次式で計算される。

$$[k] = \int [N']^T [D] [N'] dV \quad (14)$$

2) 節点変位係数を間接的な未知量とする要素

変位係数として、 x^n の項に未知係数 $\alpha_{i(n)}^{(m)}$ を乗じた

形のものを仮定し、未知係数 $\alpha_{i(n)}^{(m)}$ と節点変位係数 $u_{i(n)}^{[p]}$

との間に成り立つ次式のような変換関係を介して、剛性関係式を定式化するものである。

$$\{\delta\}=[G]\{\alpha\} \quad (15)$$

ここに $\{\alpha\}$ は未知係数 $\alpha_{i(n)}^{(m)}$ を成分とするベクトル、

$\{\delta\}$ は要素両端の節点($p=1,2$)での変位係数 $u_{i(n)}^{[p]}$ よりなる次式の節点変位ベクトルである。

$$\{\delta\} = \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^2 \{u_{z(2n-2)}^{[p]}; u_{x(2n-1)}^{[p]}\} \quad (16)$$

ここでは、曲げ挙動の変位係数関数 $u_{i(n)}(x)$ に各次数 n とも次式のように仮定した。

$$u_{z(2n)} = (n+1)\{\alpha_{z(2n)}^{(0)} + \alpha_{z(2n)}^{(1)}x + \alpha_{z(2n)}^{(2)}x^2/2\}$$

$$u_{x(2n+1)} = \alpha_{x(2n+1)}^{(0)} + \alpha_{x(2n+1)}^{(1)}x \quad ; \quad n = 0,1,2,\dots \quad (17)$$

$$\alpha_{z(n)}^{(2)} = -\alpha_{x(n+1)}^{(1)}$$

これは、Greimann-Lynn¹⁰⁾の平板曲げのせん断変形要素における、薄板での精度低下回避を目指した手法をはりに用いたもので、せん断ひずみの軸方向変化率がゼロ($\epsilon_{xz,x} = 0$)となる変位成分間の従属性を導入して、スレンダーなはりの場合に自由度増を抑えつつ、低次理論要素での精度低下を回避する手法である。

式(17)を用いた変位成分をマトリックス表示すると次式のようになる。

$$\{u\}=[N]\{\alpha\}=[N][G^{-1}]\{\delta\} \quad (18)$$

幾何学的関係式より、ひずみベクトル $\{\epsilon\}$ は次式で、

$$\{\epsilon\}=[N']\{\alpha\}=[N'] [G^{-1}]\{\delta\} \quad (19)$$

構成関係式より応力ベクトル $\{\sigma\}$ は次式で求まる。

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D]\{\epsilon\}=[D][N']\{\alpha\} \\ &= [D][N'] [G^{-1}]\{\delta\} \end{aligned} \quad (20)$$

これらと節点力ベクトル $\{f\}$ 用い、1)の要素と同様に仮想仕事の原理より剛性方程式が導かれる。

なお要素剛性マトリックス $[k]$ は次式で計算される。

$$[k] = [G^{-1}]^T \int [N]^T [D] [N] dV [G^{-1}] \quad (21)$$

3) 一般化高次理論と本有限要素法の関係

本有限要素法の基盤となっている一般化高次理論 (GHT)¹⁾ は、はりの変位成分 $u_i : i = x, z$ を高さ方向座標 z のベキ級数で式(1)のように展開仮定し、各ベキ次数ごとの変位係数 $u_{i(n)}(x)$ の支配方程式として、高次断面力のつりあい方程式 (連立微分方程式) と境界条件式を、エネルギー原理等により定式化した解析理論である。

他方、本有限要素法 (FEM)⁴⁾⁻⁸⁾ は、同じく変位成分を高さを方向座標 z のベキ級数で展開すると同時に、各ベキ次数の変位係数 $u_{i(n)}(x)$ を節点変位係数 $u_{i(n)}^{[m]}$ と変位係数関数 $N^{[m]}(\xi) : \xi = x/(l/2)$ の積で式(6)のように仮定し、未知節点変位係数の支配方程式として、要素に分割した系の節点変位係数ベクトルと一般化節点力ベクトルとの剛性方程式 (連立1次方程式) をエネルギー原理により定式化した数値解析手法である。

4. 解析例と精度特性

1) 解析系 : 等分布荷重を受ける単純支持矩形ばり

厳密解のある境界条件のはり (端面がその面内に変形しない : 両端面内点の軸直角方向変位 $\equiv 0$ の単純支持) の問題を解析する。本問題は端面がその面内に変形するはり (中立軸位置点のみ鉛直変位 $= 0$ の単純支) の問題に比して、はりの曲げに伴う伸縮挙動の解析結果が全体の解析精度に大きく影響する問題であることから、各要素の比較に適した系として採用した。

図-1 の等方性の単純ばりの上面に等分布荷重 p が満載された場合を、本手法の N 次理論要素 ($N=1 \sim 3$: 各々 1st, 2nd, 3rd と略記) に基づく C^0 連続性要素, C^1 連続性要素および C^2 連続性要素の各有限要素法で解いた。同時に Bernoulli-Euler の古典はり理論に基づく有限要素法 (Classical) による解析を行い、厳密解 (Exact)¹⁾ との比較を通じて精度の検証を行う。

2) ディープビーム ($h/l=0.75$) の場合の精度特性

まず、極端なディープビームの場合の精度特性を検

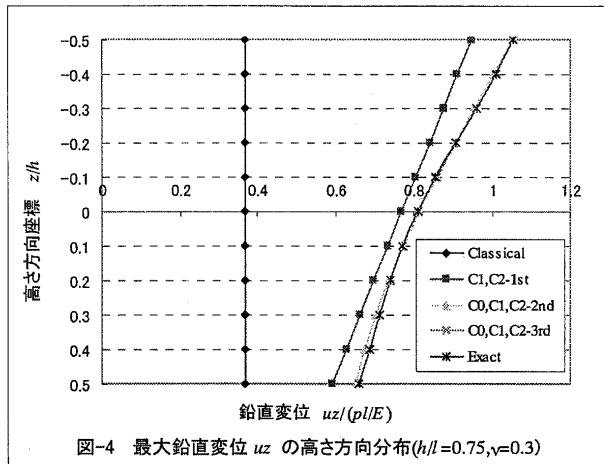


図-4 最大鉛直変位 u_z の高さ方向分布 ($h/l=0.75, \nu=0.3$)

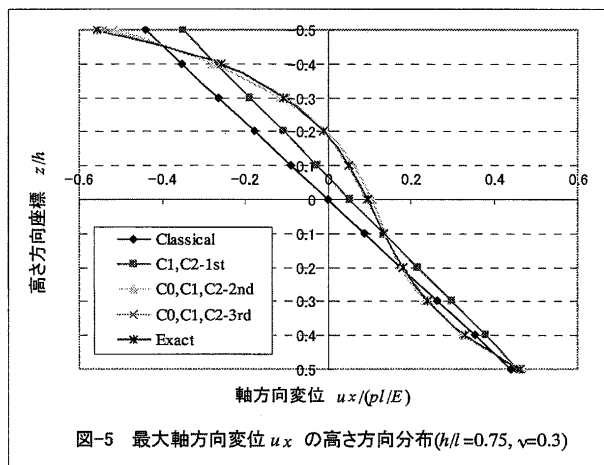


図-5 最大軸方向変位 u_x の高さ方向分布 ($h/l=0.75, \nu=0.3$)

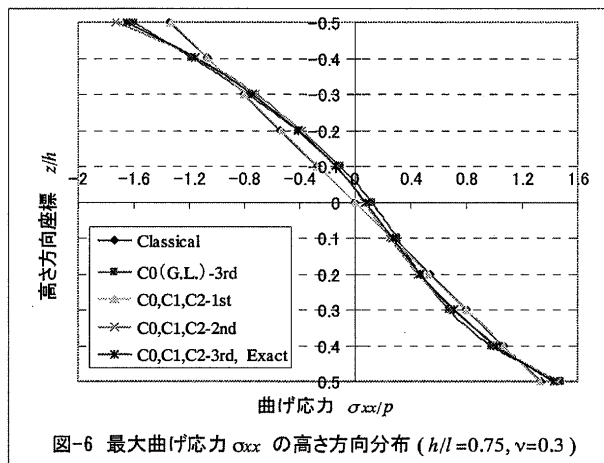


図-6 最大曲げ応力 σ_{xx} の高さ方向分布 ($h/l=0.75, \nu=0.3$)

証するため、形状比 $h/l=0.75$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ のはりの解析結果を図-4 から図-8 に示す。これらは C^0 , C^1 , C^2 連続性の各要素 (図中には $C0, C1, C2$ と表示) に関して理論次数: $N=1 \sim 3$ (図中には -1st, -2nd, -3rd と表示) の各々の解析における変位・応力の高さ方向分布の収束解である。

図-4, 図-5, 図-6 に、はりの軸直角方向変位 u_z , 軸方向変位 u_x , 曲げ応力 σ_{xx} のそれぞれ最大値を生ずる位置での高さ方向分布を示す。

1次理論要素(1st:高さ方向に0次・1次分布のみ考慮)の場合は、 C^0 連続性要素だけが、軸方向に1次分布の場合のみならず、2次分布以上の場合とも、 C^1 連続性要素ならびに C^2 連続性要素(各々、軸方向に3次分布と5次分布で、これらの収束解はほぼ同一)と異なり、それらより低精度な解を与える。

2次理論要素(2nd:高さ方向に2次・3次分布まで考慮)ならびに3次理論要素(3rd:高さ方向に4次・5次分布まで考慮)の場合は各微係数連続性要素(C^0 , C^1 , C^2)とも、要素の細分化にともない各理論次数の要素ごとに、厳密解に近似した収束解を与えており、これらの収束解の精度は理論次数の増加(2nd→3rd)に伴って向上している。また、同一の微係数連続性要素 C^k ($k=0, 1, 2$)において、理論次数 N と要素分割数 ne の組み合わせによって決まる全自由度 f をほぼ等しく採った場合の解の比較では、理論次数 N が1st→2nd→3rdと高次化するに伴い、解の精度が飛躍的に向上するのに対し、同じ理論次数 N の要素で、変位連続性 C^k の階数 k と要素分割数 ne の組み合わせによる、ほぼ同じ全自由度 f の解の比較では、変位の微係数連続性階数 k ならびに C^0 連続性要素での軸方向分布次数 $m=1\sim M$ が変化しても、各微係数連続性要素(C^0 , C^1 , C^2)がほぼ同じ精度の解を与えている。これらから、ディープビームの場合は、ほぼ同等の全自由度の要素分割モデルに関する比較では、軸方向直線分布の要素も含め変位係数関数の微係数連続性階数 k の高階化($C^0\rightarrow C^1\rightarrow C^2$)は解の精度向上にほとんど寄与しないのに対し、理論次数 N の高次化(1st→2nd→3rd)は精度向上の支配的要因になっていると言える。

図-7、図-8にせん断応力 α_{xz} と高さ方向垂直応力 σ_{zz} の各最大値が生ずる位置での収束解の高さ方向分布を示す。これらは、上述の変位 u_z , u_x および曲げ応力 α_{xx} に比べ解析精度が低下する。このため、一般化高次理論(GHT)においては、比較的良好な精度で求められる曲げ応力とのつり合いと、上下表面での応力境界条件を満足させて、高さ方向応力成分の2次的修正解を得る「つりあい法」¹⁾の適用により飛躍的に改善された解を得ている¹⁾。本有限要素法の解析結果もそうした精度低下の傾向をさらに顕著に示すため、ここでは「つりあい法」の手法用いた修正解(-eqの添字で表記)も併せて求めた。

図-7のせん断応力 α_{xz} の結果は、変位・応力のすべての成分中最も低精度の解となっており、3次理論要素(3rd)による収束解においても、上・下表面での自由境界条件を乱し、荷重載荷面である上表面近傍では厳密解から大きく離れた分布を示している。なおこの

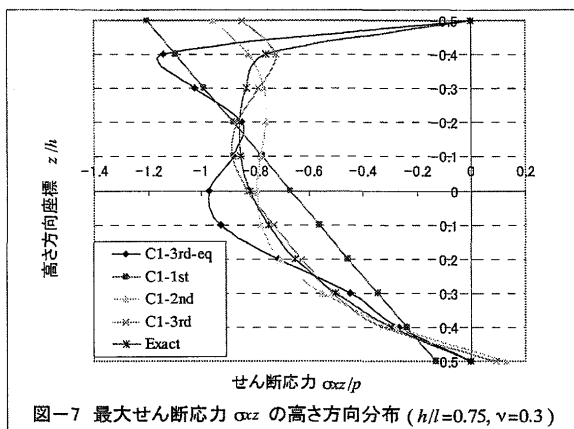


図-7 最大せん断応力 α_{xz} の高さ方向分布($h/l=0.75, \nu=0.3$)

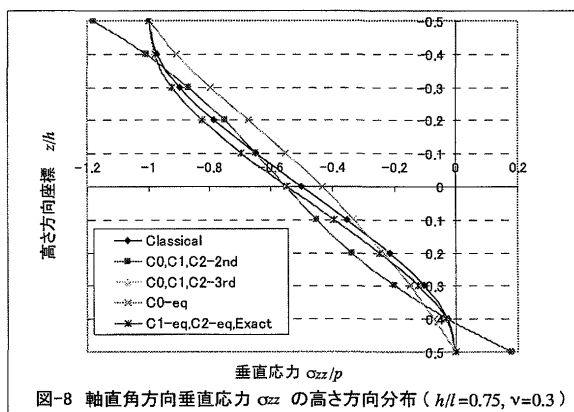


図-8 軸直角方向垂直応力 σ_{zz} の高さ方向分布($h/l=0.75, \nu=0.3$)

傾向は、さらなる理論次数の高次化を図った4次(4th)、5次理論要素(5th)の採用により、徐々に改善されるものの、それらでも未だ厳密解に収束した解には至っていないことを付記する。

他方「つりあい法」による修正解は、厳密解の周りに大きく変動し、逆に精度の悪化した解となっている。これは、上表面での自由境界条件の大きな乱れを、強制的に打ち消した弊害が現れたものと解釈できよう。しかしながらここでも、理論次数の高次化(1st~5th)に伴い解析精度は順次向上していることは確認できた。

図-8の高さ方向垂直応力 σ_{zz} は、理論次数の高次化にともなう精度向上性が良好といえる。 C^0 , C^1 , C^2 の各連続性要素とも、1次理論要素解(1st)は直線分布であり、2次理論要素解(2nd)は3次曲線分布で改善された分布となっているが、ともに上下表面の応力境界条件を乱し不十分な解である。しかし、3次理論要素解(3rd)の5次分布ではほぼ厳密解に収束している。

なお σ_{zz} の「つりあい法」による修正解を2次理論要素解(2nd)についてみると、 C^1 連続および C^2 連続性要素の修正解は、著しく精度が向上し厳密解に収束している。これに対し、 C^0 連続性要素の修正解は、上下表面での境界値:-1,0を結ぶほぼ直線の分布を示しており、精度の改善がみられていない。

これらより、ディープビームの場合の「つりあい法」による高さ方向の応力の修正は、 α_{xz} に関して C^1 連続および C^2 連続性要素では有効であるが、 C^0 連続性要素では効果的でなく、 α_{xz} に関しては何れも、むしろ精度悪化につながると言えよう。

3) スレンダービーム ($h/l=0.01$) の場合の精度特性

本有限要素法ならびにその基盤となっている一般化高次理論は、元来、はりの古典理論さらには低次のせん断変形理論での解析が困難な、ディープビームないしはこれと等価な、高さに比して短距離で変動する荷重を受けるはりの解析を主眼としているが、それらはスレンダービームに適用した場合、解析精度上の問題を生じないことが必要である。すなわち、スレンダーからディープに至る広範な形状比・荷重周期のはりの精密な解析手法の開発を目指す観点から、ここでスレンダーなはりの例として、形状比 $h/l=0.01$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ のはりの解析精度の検証を行った。

図-9は鉛直変位 u_z について、最大値を示す位置での高さ方向分布を示している。各曲線は軸方向に直線(1次)分布の変位係数関数を用いた C^0 連続性要素 ($C^0(x^i)$)、軸方向に曲線(2次以上高次)分布の C^0 連続性要素 (図中では $C0$ のように表記) および C^1 連続性要素ならびに C^2 連続性要素の各々1次(1st), 2次(2nd), 3次理論要素(3rd)による収束解を示す。

この場合は厳密な分布が古典理論解のためにより等しい一定値になるが、軸方向に曲線(2次以上)分布の C^0 連続性要素 (C^0) および C^1 連続性要素ならびに C^2 連続性要素の収束解は互いに等しい値となり、1次理論要素解(1st)は厳密解の90%程度の過小な値を示すが、2次理論要素解(2nd)では厳密解に一致している。

これらに対し、軸方向に直線(1次)分布の変位係数関数を用いた C^0 連続性要素による解 ($C^0(x^i)$) は、1次理論要素解も厳密解の80%程度とかなりの誤差を含んだ過小な値しか与えず、理論次数の高次化に従い、より過小で劣悪な精度の値を与えるようになることから、スレンダービームへの適用には大きな問題点を抱えていることがわかる。

この点を改良する目的で、開発したのが先に示した Greimann-Lynn の平板曲げのせん断変形理論要素の修正法を、はりに用いた要素 ($C^0(G-L)$) である。この要素は上述の $C^0(x^i)$ 要素と自由度が同じでありながら、軸方向に曲線分布の C^0 連続性要素 ($C^0(x^3)$) の性質を具備し、これによる結果は C^1 ならびに C^2 連続性要素とも同じく、2次理論要素で厳密解に収束した分布を与えるよ

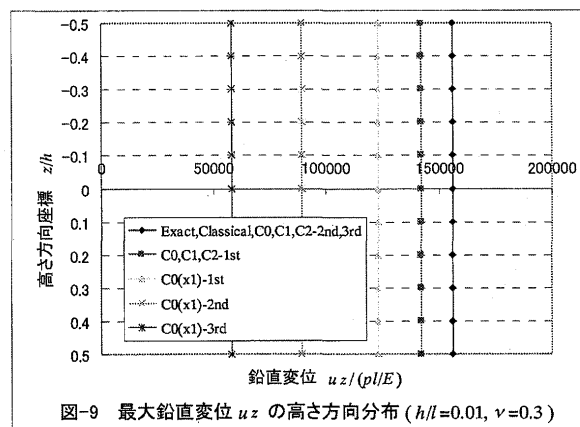


図-9 最大鉛直変位 u_z の高さ方向分布 ($h/l=0.01, \nu=0.3$)

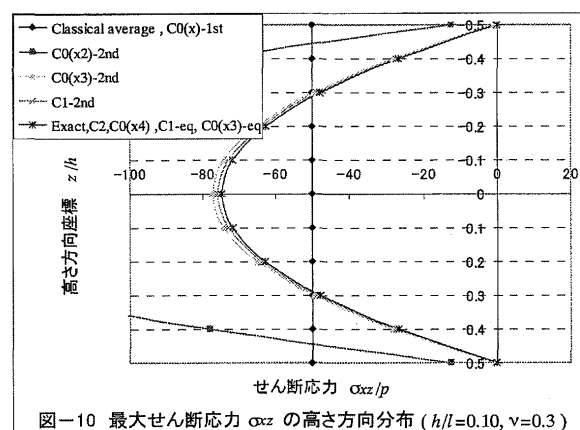


図-10 最大せん断応力 α_{xz} の高さ方向分布 ($h/l=0.10, \nu=0.3$)

うになり、改良の効果が現れたものとなっている。

図-10には、せん断応力 α_{xz} について、最大値を示す位置での高さ方向分布を示した。これらは軸方向に曲線(2次~4次)分布の変位係数関数を用いた C^0 連続性要素および C^1 連続性要素ならびに C^2 連続性要素の、各々2次理論要素(2nd)による収束解を示す。さらに比較のために、これら C^0 連続性要素および C^1 連続性要素の解の「つりあい法」による修正解 (C^1 -eq, $C^0(x^3)$ -eq) の分布、ならびに古典的平均せん断応力に等しい値を $C^0(x^i)$ -1st と与える C^0 連続性の1次理論要素 $C^0(x^i)$ -1st の結果を付記した。これらの2次理論要素解についての精度特性を以下に記す。

各 C^0 連続性要素の解は、軸方向に逐次高次の変位係数関数を採用していくに従って精度が向上し、ここには示さないが1次分布変位係数関数要素 $C^0(x^i)$ -2nd の解は逆符号すなわち正の値となり、図示の2次分布 $C^0(x^2)$ -2nd では非常に大きな値しか与えないが、3次分布 $C^0(x^3)$ -2nd でかなり厳密な分布に近づき、4次分布 $C^0(x^4)$ -2nd では厳密解に収束している。

C^1 連続性要素はこの2次理論解でかなり厳密解に近い分布となっており、 C^2 連続性要素はこの2次理論解で厳密解に収束している。

また軸方向3次分布の C^0 連続性要素ならびに C^1 連

続性要素の各2次理論要素解の「つりあい法」による修正解 $C^0(x^3)$ -eq-2nd, C^1 -eq-2nd も厳密解に収束した解となっている。

なおここには示されていないが、軸方向に1次、2次分布の変位係数関数を用いる C^0 連続性要素 ($C^0(x^1)$, $C^0(x^2)$) の解 α_{xz} を「つりあい法」で補正したものは、非常に小さな値の、低精度な分布しか与えない。

一般に、スレンダービームの場合には、高さ方向応力 α_{zz} , α_{zx} の双方に関して、軸方向に3次分布以上高次の変位係数関数を用いた C^0 連続性要素 ($C^0(x^3)$ ~) および C^1 連続性要素ならびに C^2 連続性要素による解に関しては「つりあい法」の適用で精度改善が図れるが、軸方向に1次ないしは2次分布の C^0 連続性要素の解は「つりあい法」によっても容認しうる修正解は得られないと言える。

以下に、これらの数値例以外の結果も含め、スレンダービームの解析における理論次数の高次化による高さ方向分布の高次化と精度向上の関係を、各成分ごとに示す。

まず、軸方向に3次分布以上高次の変位係数関数を用いた C^0 連続性要素 ($C^0(x^3)$ ~) および C^1 連続性要素ならびに C^2 連続性要素はほぼ同様の精度特性を示す。このうち、高さ方向に直線分布ないしは一定値しか与えない1次理論要素(1st)は、ほぼ直線分布の曲げ応力 α_{xx} に関しては、曲げモーメントの解の精度と等価であることから厳密な分布を与えるが、厳密解にもほぼ一致する古典はり理論の2次放物線分布のせん断応力 α_{xz} や、3次曲線分布の高さ方向垂直応力 α_{zz} も表せないこともあって、性能的に不十分である。

しかし2次理論要素(2nd)では、著しい精度改善がなされ変位 u_x , u_z に関しては、ほぼ厳密な分布(ここでは古典理論解も一致)に収束した分布が得られる。その結果3次理論要素解(3rd)もこれらの良好な精度の解から動かず、2次理論要素解との差はほとんどない。

なお、高さ方向応力 α_{xz} , α_{zz} の結果は、2次理論要素解でも厳密解との間にわずかに誤差を示し、3次理論要素解で厳密解に収束している。

他方、 C^0 連続性要素で軸方向に直線(1次)変化のみの変位係数関数を用いたもの ($C^0(x^1)$) は、理論次数の高次化に伴い、軸直角方向変位 u_z が前述のように過小になっていき、せん断応力 α_{xz} に至っては符号さえ一致しない等、すべての成分に関して、より劣悪な解を与えるようになる。

また、 C^0 連続性要素で軸方向に2次曲線変化の変位係数関数までを用いたもの ($C^0(x^2)$) も前者よりは改良されるものの、理論次数の高次化に伴い、非常に過大

な高さ方向応力 α_{xz} , α_{zz} を与えるようになる。さらに、これらの「つりあい法」による修正解も前述のように、容認し得る値を与えるものでないため、 C^0 連続性要素で軸方向に直線(1次)分布、2次曲線分布の変位係数関数を用いたものをスレンダービームの解析に用いることは適切ではない。

そこで、 C^0 連続性要素で軸方向に低次の変位係数関数を用いた要素で、これらの弊害を除去し有意な解を得るには、Greimann-Lynn の仮定に基づき、要素内せん断変形変一定の仮定を取り入れて変位係数関数間の従属性をもたせ、自由度を上げずに、スレンダービームにおけるせん断変形要素の精度低下を回避した要素を (C^0 (G-L)) 用いることが有効性を発揮する。

ここで図は示さないが、解析の全自由度をそろえた場合の各種2次理論要素解の比較について付記しておく。

等分布荷重を受ける単純ばりの対称性を用いて半系解析をした場合、スレンダービームの解析においては、まず、 C^2 -2nd 要素では、1要素でほぼ厳密解に一致した解(すなわち C^2 -3rd 要素解とも一致)を与えている。

このときの C^2 -2nd 要素の自由度とほぼ同じ自由度の他の各種要素で解析した結果の精度を2次理論要素解について比較すると、次のようなことが指摘できる。

C^1 -2nd 要素解では、変位 u_z , u_x の解はほぼ C^2 -2nd 要素の解と等しく良好な精度になっている。しかし、 α_{zz} の原解が劣悪な解となっているのをはじめ、他の応力成分も α_{xz} , α_{xx} の順に過大な値となる。なお、これらのうち高さ方向応力成分 α_{xz} , α_{zz} は「つりあい法」によりかなり改善された分布が得られている。

また C^0 -2nd 要素の解群では、前述のように変位関数が1次関数のみの場合の精度は (C^0 -3rd 要素の解でも同じく) 劣悪で、2次関数を用いたものも精度が悪いが、 C^1 連続要素と同次数の3次関数を重ね合わせたものは精度改善がなされ、4次関数および C^2 連続要素と同次数の5次関数まで重ね合わせたものは厳密解に近い値を与える。

これらの結果から、ディープビームには高さ方向分の高次化すなわち理論次数の高次化が有効であったが、スレンダービームには、軸方向の変位係数関数の高次化すなわち変位係数関数の微係数連続性の高階化 ($C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow C^2$) や C^0 連続性要素での変位係数関数の高次化が有効であると言える。

すなわち C^0 連続性の変位関数の場合、1次分布のみあるいは2次分布を重ね合わせた要素では、高さ方向応力の解を中心に、要素細分化を進め解析自由度を上

げて得られる収束解も劣悪な精度のものでしかない。

この場合は高階微係数連続性は無視して形式的にでも高次分布の変位係数関数を重ね合わせることが有効で、4次分布、5次分布の関数を重ね合わせることで厳密解（この場合は古典理論解も同じ）に一致する収束解が得られることがわかった。

これら高さ方向・軸方向双方の高次化の結果を総合し、スレンダービームを高次要素により解析し厳密解に一致した解を得るためには、高さ方向には2次理論ないしは3次理論要素で、軸方向の変位係数関数としては C^2 連続性要素か、 C^0 連続性要素であれば4次ないしは5次分布変位係数成分まで重ね合わせた要素を用いることが必要であることがわかった。

5. 結 言

本論文では、著者らの提案になる、はりの精密解析理論である一般化高次はり理論(GHT)の考え方を、はり曲げ解析の有限要素法に 응용した2次元はりの各種精密化有限要素法(FEM)を開発し、厳密解のある問題のうち、上面に等分布荷重を受け、面内に剛な端面を支持された単純ばりの解析を通じて、それらの基本的解析精度特性を検証した。

ここで、得られた結果を以下に列挙する。

- ①はりの変位・応力に関する2次元弾性論の厳密解を目標値とするFEMを構築した。
- ②1次理論要素は C^0 連続性要素(軸方向曲線変化を考慮のもの)、 C^1 連続性要素、 C^2 連続性要素ともせん断変形理論要素レベルの精度を有している。
- ③2次、3次理論要素は順次精度が向上する。
 - ◇ディープビーム($h/l=0.75$)の場合：
 - ◎理論次数の高次化による高さ方向分布仮定が重要。
 - ◎ C^0 (軸方向3次分布以上考慮のもの)、 C^1 、 C^2 連続性要素とも3次理論要素で(σ_{xz} 以外)厳密解に収束。
 - ◇スレンダービーム($h/l=0.01$)の場合：
 - ◎変位係数関数の高次化による軸方向分布仮定が重要。
 - ◎ C^0 (軸方向3次分布以上考慮のもの)、 C^1 、 C^2 連続性要素とも2次理論要素で厳密解に収束。
 - ◎軸方向直線分布の C^0 連続性要素だけは逆に精度が悪化。
- ④ C^0 連続性要素の軸方向分布高次化の効果：
 - 変位 u_x 、 u_z と曲げ応力 σ_{xx} の精度改善には有効。
 - 高さ方向応力 σ_{xz} 、 σ_{zz} の精度改善効果は薄い。

⑤微係数連続階数の高次化の効果：

C^1 、 C^2 連続要素は、ほぼ同等な精度特性を示し、スレンダーからディープへの広範囲なはりに有効。

⑥変位の従属性(要素内一定せん断歪 $\gamma_{xz,x}=0$)の仮定：スレンダービームの C^0 要素で、 $C^0(x^1)$ 要素を $C^0(x^2)$ 要素の性能へ改善する効果をもち有効。

⑦「つり合い法」による高さ方向応力 σ_{xz} 、 σ_{zz} の修正： C^0 要素(ディープビームの高さ・軸方向高次化要素除く)では効果的ではないが、 C^1 、 C^2 要素で有効性を発揮。

さらに、ディープビームとスレンダービームの解の精度特性を総括すると、いかなる形状比 h/l のはりに対しても良好な解を得るためには、高階微係数連続性を有する C^2 連続性要素を用いるか、あるいは C^0 連続性要素であれば軸方向に4次ないしは5次分布の変位係数関数まで採用した要素、低次の変位係数関数にはGreimann-Lynnの仮定を導入した要素とし、高さ方向に高次分布の変位係数関数まで採用する2次理論要素さらには3次理論要素のような高次理論要素を用いる必要があることが示された。

本研究によって、厳密化と精密化の図られたはり曲げ解析の有限要素法(FEM)が構築されたと同時に、一般化高次理論(GHT)の有用化が図られた。

参考文献

- 1) 平島健一・根岸嘉和：土木学会論文集, 350号/I-2, pp.351-354, 1984.
- 2) Negishi Y., K.Hirashima: JSME International Journal, Series A, Vol.37, No.3, pp.258-262, 1994.
- 3) 根岸嘉和: 第54回理論応用力学講演会講演論文集 NCTAM 2006, pp.565-566, 2005.
- 4) 根岸嘉和: 平成16年度土木学会東北支部技術研究発表会講演概要, pp.88-89, 2005.
- 5) 根岸嘉和: 土木学会第60回年次学術講演会, I-598, 2005.
- 6) 根岸嘉和: 第55回理論応用力学講演会講演論文集 NCTAM 2006, pp.685-686, 2006.
- 7) 根岸嘉和: 平成17年度土木学会東北支部技術研究発表会講演概要, pp.38-39, 2006.
- 8) 根岸嘉和: 土木学会第61回年次学術講演会, I-402, 2006.
- 9) Timoshenko S.P., J.N.Goodier: THEORY OF ELASTICITY, 3rd ed., pp.258-262, McGraw-Hill Kogakusya,.
- 10) Greimann L.F., P.P.Lynn: Nuclear Engineering and Design, Vol.14, pp.223-230, 1970.
- 11) Pagano, N.J.: Journal of Composite Materials, Vol.4, pp.20-34, 1974.
- 12) Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, E.M.: Int. J. Solids Struct. Vol.14, pp.655-662, 1978.