縦格子立体錯視の２点比較実験結果に無矛盾な脳内計算モデルの提案

A Proposal of a Computational Model in the Human Brain for the Optical Stereoscopic Illusion by Vertical Gratings that is Compatible with the Result of 2 Dots Comparing Experiment

（平成 17 年９月受理）

大槻 正伸* (OHTSUKI Masanobu)
田中 健** (TANAKA Ken)
會田 祐輔** (AITA Yuusuke)

Abstract

The optical stereoscopic illusion by vertical gratings has been found recently, and some psychological experiments on the illusion have been done.

In the present paper, we make researches on the mathematical property of the computational model for the stereoscopic illusion and construct such a computational model that is compatible with the result of so called "2 dots comparing experiments".

Next we construct a simulation program based on the constructed computational model.

１．はじめに

立体錯視現象には、一時流行したランダムドットステレオグラム[3) 4) 5) 7) 12)]や立体眼鏡による立体視等いくつか知られている[7) 12)]。ランダムドットステレオグラムはコツをつかみにくい眼球操作が必要になるし、立体眼鏡による立体視は当然ながら特別な眼鏡が必要となる。それに対して、以下で考察する「ドット平面と縦格子による立体錯視現象」は、特別な眼球操作や、光学的な眼鏡等の道具を必要としない立体錯視現象であり最近発見されたものである[1) 2) 5) 8) 9) 10) 11) 13)]。

本論文の目的は、この縦格子による立体錯視現象を説明する脳内計算モデルの基礎となる、「融合関数」（後述）について数学的に考察し、１つの自然な融合関数を示し、それをもとに脳内シミュレーションプログラムを構築することである。

以下、この錯視現象等についてやや詳しく説明する。

まず「(R,c)-ドット平面（(R,c)-ランダムドット平面）」PL(R,c)とは、各行とも一辺 R の小正方形を隙間なく、重なりなく並べるが、そのすぐ上の行よりも、x 軸方向に c だけずらして配置し平面を構成したものである（Fig. 1）。以下、一辺 R の小正方形を「ドット」と呼ぶこととする。なお、ドット平面では、各ドットを、あらかじめ用意したいくつかの色からランダムに選んで塗る。

「縦格子面 $Gr(m_1, m_2)$」とは、幅 m_1 の黒色の縦格子を m_2 の間隔をあけて平面状に配置したものである。通常は OHP シート等の透明シート上に描画し構成する（Fig. 2）。

さて、Fig.3 のようにドット平面を配置し、それに平行に h だけ離して縦格子面を配置する。観察者はドット平面から距離 d の位置から縦格子を通してドット平面を自然に（特別な眼球操作等なしに）両眼視する。すると、観察者には物理的に存在しない帯状立体が複数個知覚される。これが「ドット平面と縦格子による立体錯視現象」である。

この錯視現象を、以下では簡単に「縦格子による立体錯視」ともよぶことにする。なお、付録にこの立体錯視が確認できる刺激をつけた。

この立体錯視現象は、最初は R=1～5[mm]程度、c=R/10～R/2 程度、m_1＝0.5～2[mm]程度、m_2＝1～2[mm]程度、h=5～20[mm]程度、d=20～100[cm]程度のスケールで確認された[8) 9)]。ただし、R=m_1＋m_2の条

＊福島工業高等専門学校 電気工学科（いわき市平上荒川字長尾 30）
＊＊福島工業高等専門学校 専攻科 機械・電気システム工学専攻（いわき市平上荒川字長尾 30）

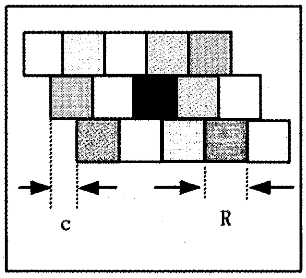


Fig. 1　Dots Plane PL(R, c)

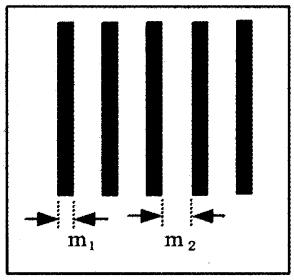


Fig. 2 Vertical Grating Gr(m_1, m_2)

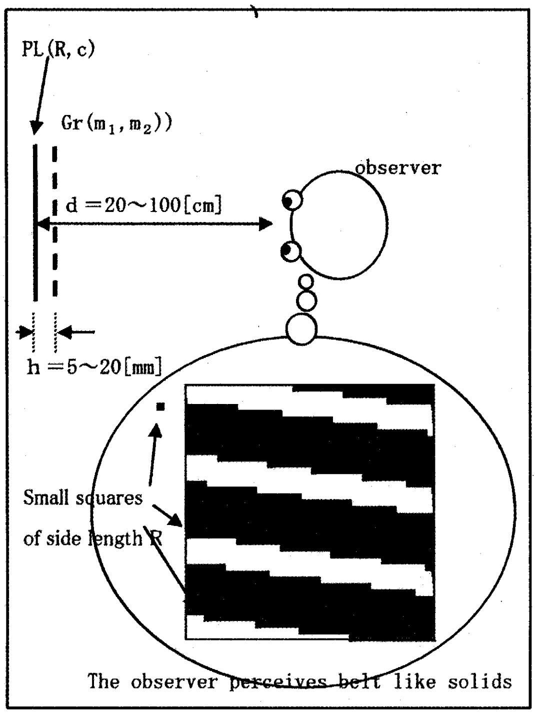


Fig. 3 The optical stereoscopic illusion by a dots plane and vertical gratings

件で帯状立体が明瞭に知覚されやすい。

その後、これを例えば10倍程度に拡大した器具でも同様の立体錯視現象が誘起されることが確認されている[2)]。また、この立体錯視現象には次の特徴があることが分かっている。

(1)　単眼視では錯視現象は生起しない。
(2)　c が大きいほど知覚される複数個の帯状立体の幅、周期が小さくなる。
(3)　R=k(m_1＋m_2)の条件でこの錯視現象は生起しやすい（ここでkは整数)。
(4)　前記のランダムドットステレオグラムの立体視ができない人でも、この錯視現象が発生することが多い。
(5)　全体の数％の人には、この錯視現象が生起しない。

さて、この立体錯視のメカニズムの詳しいところはよく分かっていないのが現状である。ドット平面を工夫することによって、帯状立体以外に、例えばドーナツ状立体を錯視させることには成功しているが[10)]、任意の図形の錯視を誘起するところまでは至っていない。

現在は、上記(1)より、脳内では、左右眼網膜像から得た情報を何らかのデータ構造で表現し、それから左右眼網膜像の差（視差）をもとに何らかの計算をしているであろうと推測されるにとどまっている。

現在は、この脳内計算の研究が行われているところである。詳しく言うと、次のような研究が行われている。

(*1) できるだけ正確な脳内計算モデルを構築し、そのモデルに基づき、各種条件（両眼位置, R, c, m_1, m_2, h, d 等）を入力し、どのような立体像が知覚されるかをシミュレートするシミュレーションプログラムを設計すること。
(*2)　できるだけ正確な心理物理学的実験により、知覚される立体像を計測すること。
(*3)　脳内計算モデル（*1）と計測結果（*2）とを比較し、誤差が少ないことを確認すること。誤差の多い計算モデルの場合は(*1)に戻り、計算モデルを修正すること。

本論文では、上記（*1）に関して数学的な考察を行うのが目的である。

現在推定されている脳内計算モデルについて以下でより詳しく述べる。

この錯視現象には次のようないくつかの段階による物理現象、計算過程が起こっていると考えられている。

(･1) 縦格子を通さずに、ドットを両眼視すれば、左右網膜像は Fig. 4 (1) のようになり、正常に遠近感が得られる。(Fig. 4(1)の白いドットを両眼視する場合、Fig. 4 下のような左右網膜像が得られるが、これらが得られる1つのドットの位置はもとのドット以外には数学的にあり得ない。例えば、白のドットよりやや遠くにありやや大きな灰色のドットでは、左網膜像は白いドットと一致するが、右網膜像は一致しない。)
(･2) しかし、縦格子を通して見ると、例えばFig. 4 (2) のようにドットの一部が縦格子により遮蔽され、左右網膜像は縦格子なしの場合に比べて小さなものとなる。
(･3) この左右網膜像が同一ドットのものであるとすれば、Fig. 4(3)に示す位置にドットがなけれ

ば数学的に矛盾してしまう。したがって、脳内ではこの遠近感の計算が行われ、ドットは実際よりも近く（手前）に感じられる。

(･4) ドット平面の多数の各ドットに対して、上記遠近感計算を行い、同程度の距離にあると計算されたドットが集団をなしているとそれを１つの連続した図形（例えば帯状立体等）と認識する。

ここでは、上記（･3）のように左右網膜像から数学的に矛盾のない遠近感計算を行うことを左右網膜像（ドットペア）の「融合」といい、(･4) の各ドット位置から集団を認識することを「統合」と呼ぶことにする。

したがって、縦格子による立体錯視には、

(･･1) 遮蔽されたドット群の認識

(･･2) ドットのペアが同一であることの判断

(･･3) ドットのペアの融合

(･･4) 同程度距離ドット集団としての統合

という過程があると考えられている。

しかし、特に、･どのような条件をもって脳内のデータとなった左右網膜像のドットペアを同一と判断するのか、･融合アルゴリズムはどのようになっているのか、･統合アルゴリズムはどのようになっているのか、これらはハードウェア（脳内細胞）レベルで行うのかそれとも何らかのソフトウェアレベルで行っているのか等、どの過程も詳しいところは明らかになっていない。

さて、本論文では、同一であることが何らかの作用により判断された直後の、ドットペアの融合（融合関数）について数学的に考察することが大きな目的である。

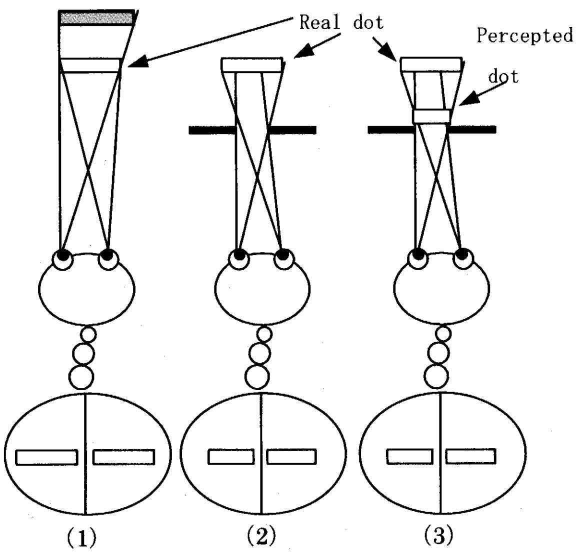


Fig.4 Guessed computation process

以下、2 節では、計算モデルの提案のために基礎となる数学的な事実について述べる。3 節では「融合関数」を、立体錯視の左右網膜像の融合を抽象化して定義し、その性質について考察する。ここでは、2 点比較実験[1) 11)]（2 つのドットに対して、それを縦格子を通して、単眼視した場合の 2 つのドットの遮蔽パターン、および両眼視した場合どちらのドットが手前（近く）に感じられたかを実際に調べる実験）の結果に「無矛盾な融合関数」という概念を定義し、そのような関数が 2 つ以上あれば、それらの平均関数も実験結果に無矛盾な融合関数であることを示す。

4 節では、2 点比較実験[1)]の結果について述べ、実際にこの実験結果から抽出された特徴に無矛盾な融合関数を構成する。

5 節では、4 節で構成した融合関数による立体錯視シミュレーションプログラムを設計し、その実行結果を示す。

2. 数学的準備

x, y, z 軸により座標付けされた通常の3次元空間を考える（Fig.5）。

PL_a を $y=a$ という xz 平面に平行な平面とする。いま、$E_L=(x_{eL}, y_{eL}, z_{eL})$, $E_R=(x_{eR}, y_{eR}, z_{eR})$ という 2 点を考え、PL_{y0} 上の点 P(あるいは図形 P) を点 E_L（あるいは E_R）をもとに PL_{y1} に射影した点 Q（図形 Q）について考える。ここでは、$y_0<y_1$ であっても、$y_0>y_1$ であってもよいものとする。

なお、点 E_L（E_R）は左眼（右眼）の座標位置を想定している。

以下では、$y_{eL}=y_{eR}<0$ および $z_{eL}=z_{eR}$ を仮定しておく（すなわち、顔（両眼の位置）は xz 平面に平行にして、y 座標は負の位置にあり、首をかしげたりしていないことを仮定する）。後ほど、縦格子を設置する面を xz 平面（y=0）にとることとする。

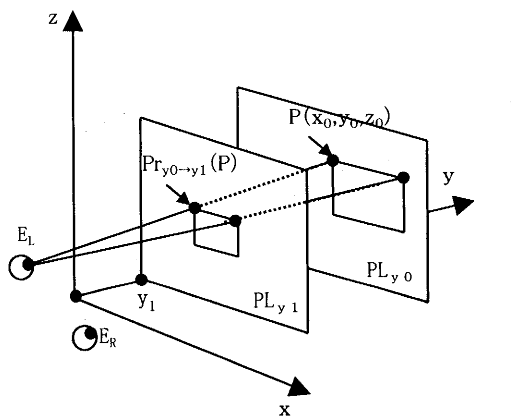


Fig.5 xyz-Space and the aspect of a projection of a point P on $y=y_0$ to the point $Pr_{y0\to y1}(P)$ on $y=y_1$

$Pr_{y0\to y1}(P)$で、平面$y=y_0$上の点P（図形P）を点E_L（E_R）をもとに平面$y=y_1$上に射影した点（図形）を意味することにする（Fig.5）。点E_L等を明示したい場合は、$Pr_{[EL]y0\to y1}(P)$等と書くこととする。

いくつか、後で必要となる数学的性質を見ておく。

【性質1】Pがx軸に平行な（PL_{y0}上の）線分であれば$Pr_{y0\to y1}(P)$はx軸に平行な（PL_{y1}上の）線分になる。

【性質2】Pがz軸に平行な線分であれば、$Pr_{y0\to y1}(P)$はz軸に平行な線分になる。

【性質3】Pが（PL_{y0}上の）x軸、z軸に平行な長方形であれば、$Pr_{y0\to y1}(P)$はx軸、z軸に平行な長方形になる。

【性質4】Pがx軸、z軸に平行な長方形であれば、$Pr_{[EL]y0\to y1}(P)$と、$Pr_{[ER]y0\to y1}(P)$は合同な長方形となる。また、$Pr_{[EL]y0\to y1}(P)$をx軸方向に平行移動することで$Pr_{[ER]y0\to y1}(P)$に一致させることができる。すなわち、これらの2つの合同な長方形は高さが同じ位置にある。

【性質5】$y_0<y_1$とする。P_1, P_2を（PL_{y0}上の）x軸、z軸に平行な2つの合同な長方形であり、同じ高さにあり、距離d_1だけ離れて位置しているものとする（Fig.6）。いま$x_{eR}-x_{eL}>d_1$という条件のもとで考える。

q_1, q_2をそれぞれP_1, P_2上の対応する点とする（例えばFig.6のように左上の頂点同士）。

$Pr_{[EL]y0\to y1}(q_1)=Pr_{[ER]y0\to y1}(q_2)$となる平面$PL_{y1}$が唯一存在し、この$y_1$は、対応する点の選び方$q_1, q_2$によらない。また、この$y_1$に対し$Pr_{[EL]y0\to y1}(P_1)=Pr_{[ER]y0\to y1}(P_2)$となる（i.e. 左右眼で射影した長方形は全く一致する）。

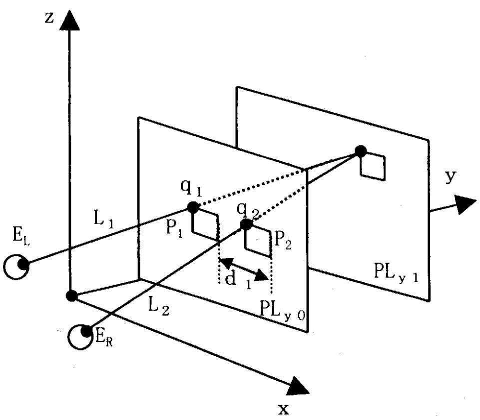


Fig.6　xyz-Space and the aspect of a fusing of two rectangles

性質5のみ証明しておく。

<性質5の証明>

$q_1=(x_0, y_0, z_0)$、$q_2=(x_0+d_1, y_0, z_0)$とする。

E_L q_1を結ぶ直線L_1の方程式は、

$$\frac{x-x_0}{x_0-x_{eL}}=\frac{y-y_0}{y_0-y_{eL}}=\frac{z-z_0}{z_0-z_{eL}}$$

E_R q_2を結ぶ直線L_2の方程式は、

$$\frac{x-(x_0+d_1)}{(x_0+d_1)-x_{eR}}=\frac{y-y_0}{y_0-y_{eR}}=\frac{z-z_0}{z_0-z_{eR}}$$

平面$y=y_1$とL_1の交点をT_1とし、平面$y=y_1$とL_2の交点をT_2とし、これらT_1とT_2のx座標が等しくなる場合を考える。$y_{eL}=y_{eR}$を仮定していたから、

$$\frac{y_1-y_0}{y_0-y_{eL}}=\frac{y_1-y_0}{y_0-y_{eR}}\text{。}$$ これをYとおく。

それぞれ、T_1, T_2のx座標x_{T1}, x_{T2}は、

$x_{T1}=Y(x_0-x_{eL})+x_0$

$x_{T2}=Y(x_0-x_{eR})+x_0+Yd_1+d_1$

これらが等しくなるのは（$x_{eR}-x_{eL}>d_1$より解が存在し）、

$$Y=\frac{d_1}{x_{eR}-x_{eL}-d_1}$$

すなわち、$y_1=\dfrac{d_1(y_0-y_{eL})}{x_{eR}-x_{eL}-d_1}+y_0$

となり、これはq_1, q_2（のx座標、z座標）によらない。このとき、$z_{eL}=z_{eR}$より点T_1, T_2のz座標が等しいのは明らかである。

したがって、$Pr_{[EL]y0\to y1}(q_1)=Pr_{[ER]y0\to y1}(q_2)$。$q_1, q_2$を$P_1, P_2$の各頂点で考えれば、性質3より明らかに$Pr_{[EL]y0\to y1}(P_1)=Pr_{[ER]y0\to y1}(P_2)$も成り立つ。

$\square_{性質5}$

3．融合関数

縦格子による立体錯視では、まずFig.7に示すように、ドットが縦格子により遮蔽され、もとのドットを縦格子なしで見たときとは異なる左右網膜像が得られる（Fig.7上）。これらが融合され、矛盾のないように距離計算され、もとのドットの位置とは異なる位置にドットが知覚されると考えられるが、このドットの融合について以下で考察する。

ここで「融合関数」について定義する。

【定義1】（集合S_{y0}, S_0, S, V_0, U_0の定義）

いま、平面$y=y_0$上のx軸、z軸に平行な長方形rは　$r=[a,b]\times\{y_0\}\times[c,d]=$

$\{(x,y,z);x\in[a,b],y=y_0,\ z\in[c,d]\}$で表される。このような長方形全体の集合を S_{y0}とする。すなわち、

[1]$S_{y0}=\{[a,b]\times\{y_0\}\times[c,d]\ ;\ a\leqq b, c\leqq d, a,b,c,d\in\mathbf{R}$ （Rは実数の集合）$\}$

[2]$S=\bigcup_{y_0\in\mathbf{R}}S_{y0}$ とする（S は xz 平面に平行かつ x 軸、z 軸に平行な長方形全体の集合となる)。

[3]$V_0=\{[a,b']\times\{0\}\times[c,d]\cup[b'+m_1,b]\times\{0\}\times[c,d]\}$

V_0はxz平面上の、Fig.7上の左網膜像のような、一部が m_1の縦格子により遮蔽されている長方形（同じ高さにある小長方形 2 つの和集合として表現される）の集合である。

[4] $U_0=S_0\cup V_0$とする（S_0はS_{y0}の y0=0 としたもの）。U_0はxz平面上に縦格子を設置し、Sに属する長方形をある点でxz平面に射影したとき現れる図形の集合（観察者の網膜像の集合）を含む。正確にいうとU_0の一部は観察者の網膜像の集合とは異なるが、U_0と実際の網膜像を対応させる関数を考えるとモデルが複雑になるため、U_0の一部と網膜像を同一視することにする。すなわち、

U_0（の一部）をもって網膜像集合と考える。□$_{定義1}$

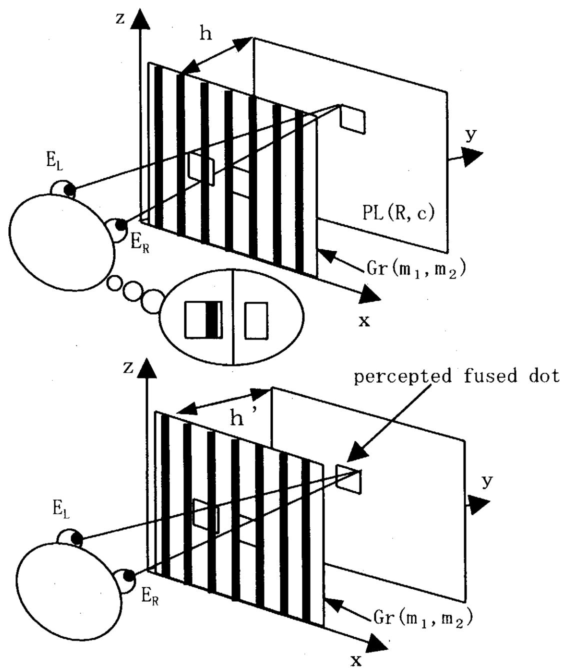


Fig.7 The concept of fusing

【定義2】(融合関数、位置関数)

[1]関数$\phi:U_0{}^2\to S$ が、次の条件を満たすとき、これを「融合関数」とよぶことにする。(これは網膜像 2 つから１つのある距離にある長方形を対応させる関数である。)

ϕは融合関数 $\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$

$\forall(r_1,r_2)\in S_0{}^2$に対し、

$\exists y_0\ ;\ \exists\, r\in S_{y0}\ ;$

$Pr_{[EL]y0\to0}(r)=r_1\wedge Pr_{[ER]y0\to0}(r)=r_2$

$\Rightarrow\phi(r_1,r_2)=r$

[2]位置関数 $f_y:S\to\mathbf{R}$(Rは実数)を次で定義する。

$r\in S_{y0}\Rightarrow f_y(r)=y_0$

すなわち、位置関数は、xz 平面、x 軸、z 軸平行な長方形の y 座標の位置を与える関数である。

□$_{定義2}$

定義 2[1]の意味は、「縦格子がなければ、$r\in S_{y0}$は左右眼位置の点をもとに、平面 y=0（xz 平面）上に射影され、同じ高さの合同な長方形が得られる（性質 4）が、この場合は性質 5 により正しい位置に融合される。」ということを「融合」の基本的要件に入れようということである。

次に、「2 点比較実験結果に無矛盾な融合関数」について定義する。

【定義3】(2点比較実験結果)

$(r_{1L},r_{1R},r_{2L},r_{2R})\in U_0{}^4$に対し、

$(r_{1L},r_{1R},r_{2L},r_{2R}$, 1の方が手前)または、

$(r_{1L},r_{1R},r_{2L},r_{2R}$, 2の方が手前)

の形のデータを 2 点比較実験結果とよぶことにする。これをそれぞれ簡単に

$(r_{1L},r_{1R},r_{2L},r_{2R},1)$, $(r_{1L},r_{1R},r_{2L},r_{2R},2)$

と書くことにする。□$_{定義3}$

2 点比較実験結果とは、ドット平面上のランダムな位置に描いた 2 つのドット（大きさは同じで一辺 R の正方形）に対し、第 1 ドットの左右網膜像$(r_{1L},r_{1R})\in U_0{}^2$、第 2 ドットの左右網膜像$(r_{2L},r_{2R})\in U_0{}^2$を（それぞれ単眼視することにより）調べ、かつ、どちらのドットが近く（手前）に見えたかの実験を行うときに得られる 1 試行分のデータである[1)] (Fig.8)。 文献 1)ではこのような実験を 400 試行行い、データを得ている。

ただし、この実際の実験では、左右網膜像を$U_0{}^2$に分類するのではなく、11 パターン分類としている。そして、この実験結果から抽出された特徴があるが、それについては後述する。

【定義4】(2点比較実験結果に無矛盾な融合関数)

$data_1$, $data_2$, ... , $data_n$をn個の2点比較実験

結果のデータとする。

$data_k=(r_{k1L}, r_{k1R}, r_{k2L}, r_{k2R}, a_k)$, k=1, 2, …, n、$a_k = 1$ または 2、とする。

$\phi: U_0{}^2 \to S$ が、$\{data_1, data_2, .., data_n\}$ に無矛盾な融合関数である。

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$

ϕ：融合関数　かつ

$\forall k$, $a_k = 1 \Rightarrow$

$f_y(\phi(r_{k1L}, r_{k1R})) < f_y(\phi(r_{k2L}, r_{k2R}))$,

$a_k = 2 \Rightarrow$

$f_y(\phi(r_{k1L}, r_{k1R})) > f_y(\phi(r_{k2L}, r_{k2R}))$

□定義4

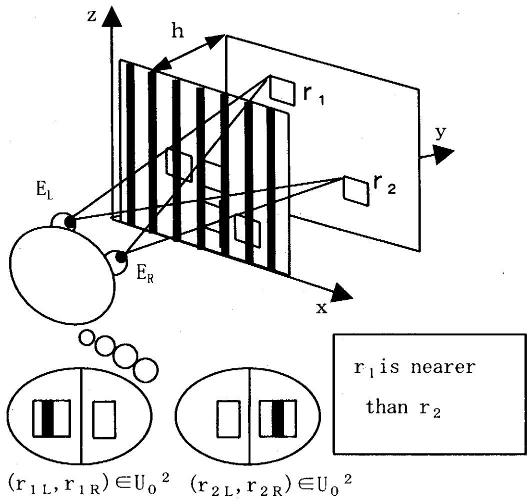


Fig.8　An experiment of 2 dots comparing

さて、2点比較実験結果に無矛盾な融合関数は、数学的には複数個あり得る。人間の脳内の計算では、2点比較実験結果に無矛盾な融合関数の1つ（あるいはそれに近い関数）を計算していると考えられるが、それがどのような関数なのかは明らかになっていない。

ここでは、複数の融合関数があった場合の性質について考察しておく。

【定理1】

$data_1$, $data_2$, …, $data_n$ をn個の2点比較実験結果のデータとする。

ϕ_1, ϕ_2, …, ϕ_m が全て $\{data_1, data_2, …, data_n\}$ に無矛盾な融合関数であるとする。

このとき、これらの値の平均をとる関数

$$\phi \overset{def}{=} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \phi_i$$

も、$\{data_1, data_2, …, data_n\}$ に無矛盾な融合関数となる。

ここで、平均した関数 ϕ とは（各 ϕ_i の値は長方形であるから、それらの）位置、大きさを平均した長方形をその値とする関数のこととととする。

すなわち、1つの $(r_L, r_R) \in U_0{}^2$ に対し $\phi_i(r_L, r_R)$ =「(x_i, y_i, z_i) を中心とする縦 t_i、横 w_i の xz 平面、x 軸、z 軸に平行な長方形」

のとき、$\phi(r_L, r_R)$ を

$\left(\frac{1}{m}\Sigma x_i, \frac{1}{m}\Sigma y_i, \frac{1}{m}\Sigma z_i\right)$ を中心とする、縦 $\frac{1}{m}\Sigma t_i$、横 $\frac{1}{m}\Sigma w_i$ の xz 平面、x 軸、z 軸に平行な長方形で定義する。

<証明>

平均した関数 ϕ が融合関数であることは明らかである。なぜなら、各 ϕ_i が融合関数であるから、

$(r_1, r_2) \in S_0{}^2$ に対し、$\exists y_0$；$\exists r \in S_{y0}$；

$Pr_{[EL]y0\to 0}(r) = r_1 \wedge Pr_{[ER]y0\to 0}(r) = r_2$ のときは、

$\forall i, \phi_i(r_1, r_2) = r$（一定）であるから、位置、大きさの平均をとっても結果は r となり、$\phi(r_1, r_2) = r$ となる。

次に、平均した関数 ϕ が n 個のデータに無矛盾であることは次のようにして分かる。

$\forall data_k = (r_{1L}, r_{1R}, r_{2L}, r_{2R}, a_k)$, $\forall \phi_i$,

$a_k = 1 \Rightarrow$

$f_y(\phi_i(r_{k1L}, r_{k1R})) < f_y(\phi_i(r_{k2L}, r_{k2R}))$

$a_k = 2 \Rightarrow$

$f_y(\phi(r_{k1L}, r_{k1R})) > f_y(\phi(r_{k2L}, r_{k2R}))$

が成り立っている。したがって、

$\forall data_k = (r_{k1L}, r_{k1R}, r_{k2L}, r_{k2R}, a_k)$,

$a_k = 1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{m}\Sigma f_y(\phi_i(r_{k1L}, r_{k1R})) = f_y(\phi(r_{k1L}, r_{k1R})) < \frac{1}{m}\Sigma f_y(\phi_i(r_{k2L}, r_{k2R})) = f_y(\phi(r_{k2L}, r_{k2R}))$$

$a_k = 2$ の場合も同様である。

□定理1

4. 実験データに無矛盾な具体的融合関数

2点比較実験結果（定義3）に無矛盾な具体的な融合関数を構成する。ただし、前述のように、文献1)の実験結果は、$U_0{}^2$ を1ドットの網膜像とするのではなく、11段階にディジタル化してある[1)]。

また、全実験データと無矛盾な融合関数を考えるのは手間がかかるため、今回は $R=m_1+m_2$ という条件での実験結果（200個）から抽出された下記の【特徴

1】に無矛盾な融合関数を考えることにする。

Fig.9 は１つのドットに対する左右網膜像のパターンを描いたものである。実際は左右網膜像は高さが同じ位置にある長方形（一部が縦格子で遮蔽された長方形）であるが、高さをそろえると見にくくなるため、右網膜像の方を下にずらして描いてある。

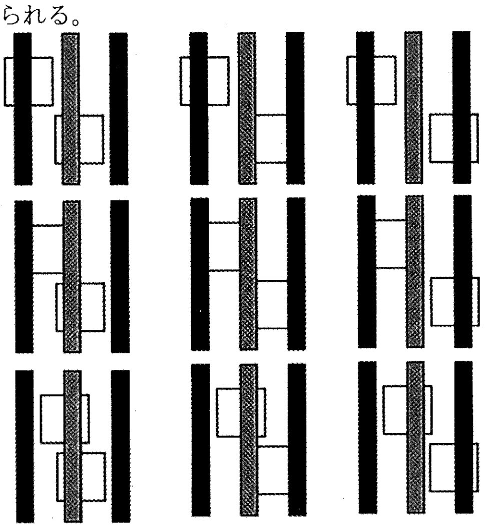
例えばFig9.(1) Aグループの左上の図は次のような意味を持っている。左網膜像は左右の縦辺は完全に見えているが縦格子により一部遮蔽されており、基準線（中央の灰色の縦格子）のすぐ左の透明領域に主要部（大きい方の長方形）が位置している。右網膜像は同様であるが、ただし基準線の右の透明領域に主要部が位置している。

Aグループとは、１つのドットに対する左網膜像の主要部、右網膜像の主要部が位置するところが、基準線に対し、別の側にあるものである。ただし、ドットの左右縦辺の遮蔽のされ方によりいくつかのパターンをとりうる。

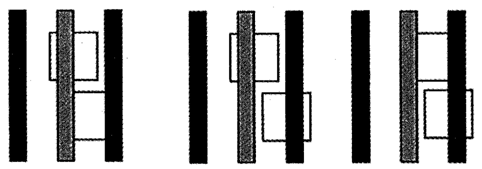
また B グループとは、左網膜像の主要部も右網膜像の主要部も、ある基準線に対し同じ側に位置しているものである。

さて、実験結果から抽出された特徴とは、次のものである。

【特徴 1】 A グループの遮蔽パターンのドットはBグループの遮蔽パターンよりも確実に遠く（奥）に感じられる。



（1） The Group A



（2） The Group B

Fig.9 Dot patterns seen by left eye and right eye

この特徴１に無矛盾な融合関数を以下で提案する。

【定義 5】「長方形の(α, β)点」とはFig.10のような、左上の頂点から、$\alpha\times$横の長さだけ横方向に、$\beta\times$縦の長さだけ下方向にある点とする。（ただし$0\leqq\alpha\leqq1$、$0\leqq\beta\leqq1$とする。）

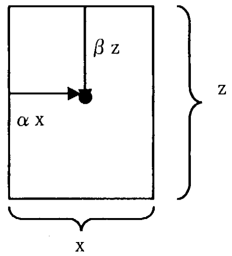


Fig.10 (α, β)point

【定理 2】 ドット$r\in S$の左右網膜像の主要部の２つの長方形r_L, r_Rを考える。r_L, r_Rに対して、それぞれの(α, β) 点をA,Bとする。

$Pr_{[EL]0\to y1}(A)=Pr_{[ER]0\to y1}(B)$となる平面$PL_{y1}$が唯一存在する（$\alpha$により$y_1$は変化する)。

$\phi_{\alpha\beta}(r_L, r_R)=$「$Pr_{[EL]0\to y1}(r_L)$と$Pr_{[ER]0\to y1}(r_R)$の和集合」(Fig.11)

と定義すると、$\phi_{\alpha\beta}$は前記２点比較実験から抽出した特徴１に無矛盾な融合関数となる。

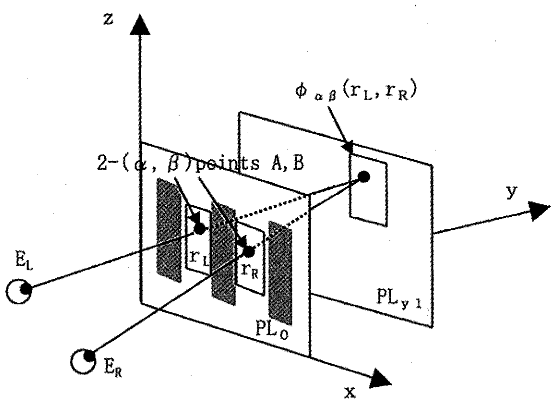


Fig.11 Aspect of $\phi_{\alpha\beta}$

＜証明＞

２つの長方形（左右網膜像の主要部r_L, r_R）の縦の長さ、高さの位置は等しいことに注意する。したがって、点A,Bのz座標は等しくなる。

(1) $Pr_{[EL]0\to y1}(A)=Pr_{[ER]0\to y1}(B)$となる平面 PL_{y1}が唯一存在することは性質５の証明より明らかである（ここでは「左右眼の幅＞A,B間の距離」を暗黙に仮定している)。

(2) 性質3より、$Pr_{[EL]0\to y1}(r_L)$、$Pr_{[ER]0\to y1}(r_R)$は長方形となる。しかも、これらは、共通点$Pr_{[EL]0\to y1}(A)=Pr_{[ER]0\to y1}(B)$を内部にもつ、縦の長さ、高さの位置の等しい長方形になるから、和集合も長方形となり、$\phi_{\alpha\beta}$は正しく定義される（well defined である）。

(3) 定義2、性質5より、$\phi_{\alpha\beta}$が融合関数であることは明らかである。なぜなら、定義2では、$(r_L, r_R)\in S_0{}^2$で縦格子のない場合を考えるから性質4からr_Lとr_Rは合同である。
性質5より、これらを融合すると、それぞれの（α,β）点を融合した点を含む長方形となるからである。

(4) あとは上記特徴1に無矛盾であることを示せばよい。

まず、性質5の証明より、
$y_1=f_y(\phi_{\alpha\beta}(r_L,r_R))$は、融合する2点A,Bの距離$d_1$が大きいほど大きくなる。
Aグループの場合、r_Lの(α,β)点とr_Rの(α,β)点の距離＞$\frac{m_2}{2}$　、一方Bグループの場合r_Lの(α,

β)点とr_Rの(α,β)点の距離$\leqq\frac{m_2}{2}$　となる。
したがって、$\phi_{\alpha\beta}$は特徴1に無矛盾となる。
(4.1)Aグループにおいて、2つの(α,β)点間の距離＞$\frac{m_2}{2}$　の証明

下記(Fig.12)の(1)の場合について証明する。他のFig.9のパターンの場合の証明も同様である。

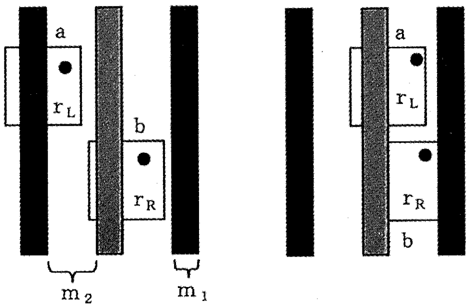


Fig.12 Two examples of Group A and Group B

左網膜像の主要部の長方形の横の長さをa、右網膜像のそれをbとする。

2つの(α,β)点間の距離をd_{LR}とすると
$d_{LR}=m_2+m_1+\alpha b-\alpha a=m_2+m_1+\alpha(b-a)$
いま、R(正方形の一辺の長さ)$=m_1+m_2$を仮定していて、r_L, r_Rは、左右網膜像の主要部であるから、
$\frac{m_2}{2}\leqq a\leqq m_2$　、　$\frac{m_2}{2}\leqq b\leqq m_2$

$\frac{m_2}{2}$

したがって、$|\alpha(b-a)|\leqq$　　　となり、
$d_{LR}>\frac{m_2}{2}$ となる。

(4.2) Bグループにおいて、2つの(α,β)点間の距離$\leqq\frac{m_2}{2}$　の証明
Fig12.(2)について証明する。(4.1)と同様に、
$d_{LR}=\alpha b-\alpha a=\alpha(m_2-a)\leqq\frac{m_2}{2}$
他のパターンについても同様に証明される
□定理2

定理2により、特徴1に無矛盾な融合関数はいくつも存在する。例えば、ϕ_{00}は左右網膜像の左上の頂点で、またϕ_{10}は右上の頂点で融合する関数となる。

それから、$\phi_{\alpha\beta}(r_L,r_R)$を今回は和集合で定義したが、和集合でなく共通部分としても無矛盾な融合関数が構成できる（無矛盾性は$f_y(\phi_{\alpha\beta}(r_L,r_R))$により決まり、その形状には関係がない)。

さて、2点比較実験に無矛盾な人間の計算する融合関数は今のところ特定されていない。今回は、融合関数という概念を定義し、その性質について調べたのである。また、現在のところ、「人間は脳内でいずれかの融合関数に近いものを計算しているのではないか」と推定されるにとどまっている。

5. 1つの融合関数によるシミュレーション

ここでは、2点比較実験の結果に無矛盾な融合関数を$\phi=(\phi_{00}+\phi_{01})/2$としてシミュレーションした結果を示す（Fig.13)。シミュレーションプログラムはDelphi言語処理系を用いて設計した。

シミュレーションは、付録の刺激を h=1.0[cm]、d=60.0[cm]で、眼の幅=7.0[cm] の観察者が知覚するものとしてある。白いドットほど近く（手前）に感じることを示す。実際に付録では2～3本の帯状立体が知覚されるが、Fig.13でもそれが現れている。

6. 結言および今後の課題

縦格子とランダムドット平面による立体錯視現象について、まず現象そのものについて述べ、その脳内計算モデルについて数学的な性質を考察した。そして、2点比較実験[1]結果に無矛盾な計算モデルを提案し、それに基づきシミュレーションプログラムを設計した。

今後の課題として、次のことがあげられる。

(1) シミュレーション結果と実際に知覚される錯視像は確かに似たものとなったが、これがどの程度一致するのかを精密な心理物理学的実験を行

い結果を比較し調べること。

(2) 今回は 2 点比較実験結果から得られた大きな特徴に無矛盾な融合関数を構成したが、この他にも小さな特徴が見つかっている。これらすべての特徴に無矛盾な融合関数について調べること。

(3) 実際に人間が計算している融合関数を特定すること。

(4) 今回は、各ドットは xz 軸に平行な長方形としていたが、縦格子面を xz 平面上で少し回転すると、ドットは軸平行な長方形でなくなるがこの場合も立体錯視現象が現れる。このように、ドットを軸平行でない長方形、あるいは、その他の図形としたときの融合関数について調べること。

また、この場合の人間の脳内計算過程について調べること。

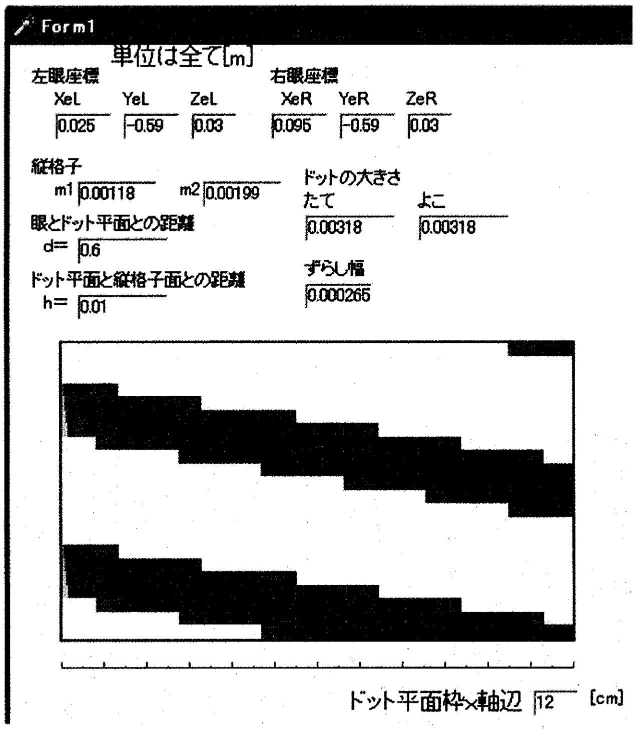


Fig.13 A Result of the simulation

参考文献

1) 會田祐輔,中野良樹,大槻正伸、縦格子とそれに平行なドット平面による立体錯視現象における、ドット遮蔽と遠近感に関する基礎研究－2 点比較実験による遮蔽パターンと遠近感との関係の推定－、日本認知科学会第 22 回大会発表論文集 pp258－259、2005 年

2) 會田祐輔,大槻正伸,中野良樹,遠藤大介,玉橋修司,馬場清隆,蛭田勇人、大規模スケールのランダムドット平面と縦格子による立体錯視現象、日本認知科学会第 21 回大会発表論文集 pp84－85、2004 年

3) デビッド・マー（乾 敏郎、安藤 広志訳）、ビジョン、産業図書、1987 年

4) 井上 弘、立体視の不思議を探る、オプトエレクトロニクス社、1999 年

5) ジャック・ニニオ（鈴木光太郎、向井智子訳）、錯覚の世界、新曜社、2004 年

6) Y.Nakano,M.Ohtsuki : A Sterescopic Moire Illusion:Apparent Depth Stripes Produced by Vertical Gratings Superimposed on Random-Dots, Tohoku Psychologica Folia Vol.63, 2004

7) 新津 靖、裸眼立体視技術の最新動向、情報処理 Vol.45, No5（通巻 471 号）pp510－515、2004 年

8) 大槻 正伸,中野 良樹、縦格子を通した二次元平面の両眼視によって生じる波状立体面の知覚、日本認知科学会テクニカルレポート（JCSS-TR-36）pp 1－12、2000 年

9) 大槻 正伸,中野 良樹、ランダムドット平面と垂直グレーティングの重ね合わせによる帯状立体面の出現－融合アルゴリズムの検討－、日本認知科学会第 18 回大会発表論文集、2001 年

10) 大槻 正伸,中野 良樹、ランダムドット平面と縦格子の重ね合わせによるトーラス状図形の立体錯視像の出現、日本認知科学会第 20 回大会発表論文集 pp306－307, 2003 年

11) 大槻正伸,會田祐輔,中野良樹、ランダムドット平面と縦格子による立体錯視におけるドットの遮蔽パターン解析、日本認知科学会第 21 回大会発表論文集 pp86－87, 2004 年

12) 下條 信輔、視覚の冒険、産業図書、1993 年

13) 田中 健,安藤修悟,小金井 綾人,中野 良樹,大槻 正伸、縦格子と自然地面による波状立体錯視現象の測定と解析、日本認知科学会第 22 回大会発表論文集、pp256－257, 2005 年

付録（縦格子による立体錯視現象を誘起する刺激）

下記縦格子をOHPシート等にコピーし、ドット平面から5～10[mm]程度離して縦格子面を配置し、50～60[cm]程度離れた位置から縦格子面を通してドット平面を自然に両眼視する。
（上のランダムドット平面）物理的に存在しない帯状立体面が2～3本知覚される。
（下のドット群）同一平面上にあるドットに遠近感がつく。