不均等曲げ理論によるスプリングバック解析

An Analysis of Spring Back by Non-Uniform Bending Theory

（平成17年9月受理）

永井　康友*（NAGAI Yasutomo）

Abstract

A simple calculation method of spring back occurred in bending process is useful for products and/or die designs of bent part. Now the spring back is calculated by using the conventional “uniform bending theory”. However the result calculated by this theory shows a small value in comparison with the actual spring back. It is the reason that the deformation around the boundary between curvature and flat portion cannot be analyzed because of ignoring shear deformation. A simple and practical equation is induced by the spring back analysis based on “non-uniform bending theory” which is considered the shear deformation approximately. The results calculated by this equation are in good agreement with the results by FEM simulation.

1．まえがき

板を曲げ加工したときに、どの位スプリングバックするかを机上で簡便に求めることができれば、曲げ品の製品設計や金型設計などに役に立つ。最近ではFEMシミュレーションが発達し、複雑な変形履歴を受ける曲げ変形でもある程度精度良くスプリングバックを計算することができるようになった。しかし、計算準備（モデル作成）と計算に多大の時間がかかるのが難点であり、誰でもが簡便に、という訳には行かない。

多少計算精度が悪くても、製品形状、材質が与えられたとき大体どの位のスプリングバックを生じるのか、その場ですぐに電卓などで簡単に求めたいというニーズは依然として高い。

現在はこのような簡便な計算方法として「均等曲げ理論」が用いられている。しかし、この理論ではせん断変形を無視しているため、曲げR止まり（曲率部と平坦部の境界）近傍の変形を解析できず、スプリングバックの計算値は実際よりも小さめになる。

そこで、本論文では簡便かつ予測精度を上げることを目的に、せん断変形を近似的に考慮した、著者が提案した「不均等曲げ理論」[1)]によるスプリングバック計算式を提示する。もちろん簡単な近似式なので、曲げ戻し変形やボトムでの決め押しなどの影響は考慮できないが、形状が規定された曲げ品に対してのスプリングバック予測式として実用的に使うことができる。

2．均等曲げ理論の問題点

均等曲げ理論は曲げモーメントが一定（均等）な条件の下での理論である。Fig. 1(a)のような曲げ半径が一定な曲率部と、曲率0の平坦部を有する曲げ変形にこの理論を適用すると、曲率部のみが変形し、平坦部は変形しない（剛体のまま）ことになる。つまり、曲率部では曲げ半径が一定であるから、Fig. 1(b)の実線のように曲げモーメント（あるいは曲げひずみ）は一定であり、平坦部ではそれが曲率部との境界（R止まり）x_c^*を境に不連続的に0になる。

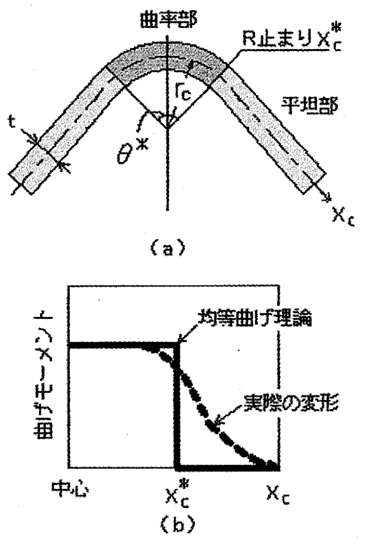

Fig. 1　曲率部と平坦部を有する曲げ

* 福島工業高等専門学校　機械工学科　（いわき市平上荒川字長尾30）

しかし、実際の変形では不連続に変化することはあり得ず、Fig. 1 (b)の破線のようにＲ止まり付近で連続的に変化し、平坦部でも曲げモーメントが発生している。均等曲げ理論でFig. 1のような曲率部と平坦部を持つような曲げを解析すると、平坦部の曲げモーメントを無視することになるので、スプリングバックは実際よりも小さく現れる。

そこで、この均等曲げ理論の欠陥を改良したのが、次章に述べる「不均等曲げ理論」である。ちなみに、「不均等」というのは曲率が一定であっても曲げモーメントは一定でない(不均等)としているからである。

3．不均等曲げ理論

Fig. 2 にＲ止まり近傍の材料の変形状態を示したが、外表面では引張変形のため曲率部へ材料が引き込まれ、反対に内表面側では圧縮変形のため曲率部から押出される。すなわち、変形前、板面に垂直であった要素abcdは変形後にa'b'c'd'のように板面に垂直でなくなり、ϕだけ傾く。つまり、せん断変形を受けている。

Fig. 3 を参照して、もう少し詳しく説明すると、変形前$P_0Q_0R_0S_0$の板厚要素が変形後PQRSになるものとすると、この理論は「変形後の線素PQは直線であるが、線素 AB とは直交しなくなりϕだけせん断変形により傾く」と仮定している。なお、ϕをここでは「せん断角」と呼んでいる。

Fig. 3 の幾何学的関係から次式が導かれる。

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (1)$$

上式でｒは線素 AB の曲率半径であり、ρは直線 PQ

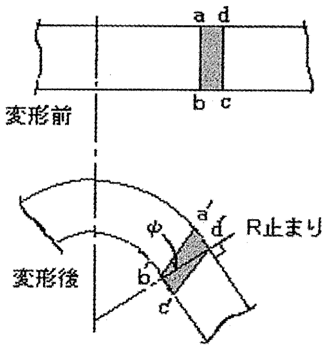

Fig. 2　R止まり近傍材料の変形挙動

およびRSの交点からの点Aまでの距離である。このρが本理論においてキーとなる量で、ｒと対比して「相当曲率半径」と呼んでいる。また、$1/\rho$を「相当曲率」

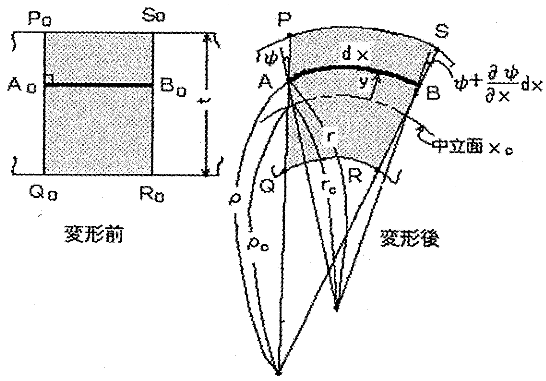

Fig. 3　変形前後の板厚要素

と呼んでいる。

$1/\rho$と $1/r$ は式(1)から分かるようにせん断角の曲げ方向の変化$\partial\phi/\partial x$だけ異なる。もし、せん断変形が無ければ両者は等しいし、また$1/r$が０(すなわち、直線）であっても、せん断角の変化があれば、$1/\rho$は０ではない。

中立面の曲率半径および相当曲率半径をそれぞれ、r_c、ρ_cとし、中立面からの線素 AB までの距離をｙとすると、AB の曲げひずみ（公称ひずみ）εは、均等曲げ理論においては幾何学的に、

$$\varepsilon = y / r_c \qquad (2)$$

で表される。しかし、ϕがあるとεは近似的に、

$$\varepsilon = y / \rho_c \qquad (3)$$

で表すことができる。なお、近似的とはϕは比較的小さいとしてϕ^2を１に対して無視している。この式(3)が不均等曲げ理論における、ひずみの定義式になる。

式(2)と(3)はr_cとρ_cの違いだけであり、式の形は同じである。従って、相当曲率$1/\rho_c$を用いれば、従来の均等曲げと同じような感覚で、せん断変形を考慮した曲げの解析ができる。このことが本理論の大きなメリットである。

4．解析

4．1　基礎式の誘導

実用的な観点から、スプリングバック量が数値計算によらずに解析的に簡単な計算式で求められるようにするため、次の仮定をおく。

(1) 広幅の板を対象として、幅方向には材料が伸び縮みしない平面ひずみ変形とする。また、軸力はないものとし、中立面と中央面は一致する。

(2) 応力とひずみの関係は全ひずみ理論を用い、また、材料は等方剛塑性材とし、塑性曲線は次式のｎ乗硬化則に従うものとする。

$$\sigma_g = \sigma^* \varepsilon_g^{\,n} \qquad (4)$$

σ_g：相当応力、ε_g：相当ひずみ、

n：加工硬化指数、σ^*：塑性定数

(3) せん断角ϕは板厚内で一定とする*1。

(4) 相当ひずみε_gの中のϕを無視する*2。

$$\varepsilon_g = \frac{2}{\sqrt{3}}|\varepsilon| \tag{5}$$

以上の仮定の下で、曲げひずみεが式(3)で定義されるとして、曲げ応力σとせん断応力τを計算すると次式になる。

$$\sigma = \frac{4}{3}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_g}\sigma_g = A\left|\frac{y}{\rho_c}\right|^n \mathrm{sgn}(y) \tag{6}$$

$$\tau = \frac{1}{3}\frac{\psi}{\varepsilon_g}\sigma_g = \frac{A}{4}\left|\frac{y}{\rho_c}\right|^{n-1}\psi \tag{7}$$

上式の中のAは次式で定義される材料定数である。

$$A = \sigma^*\left(2/\sqrt{3}\right)^{1+n} \tag{8}$$

曲げ応力σとせん断応力τによって生ずる曲げモーメントMとせん断力Qは次式によって定義される。なお、$1/\rho \geqq 0$として扱っている。

$$M = 2\int_0^{t/2}\sigma y dy = \frac{2A}{2+n}\left(\frac{t}{2}\right)^{2+n}\left(\frac{1}{\rho_c}\right)^n \tag{9}$$

$$Q = 2\int_0^{t/2}\tau dy = \frac{A}{2n}\left(\frac{t}{2}\right)^n\left(\frac{1}{\rho_c}\right)^{n-1}\psi \tag{10}$$

外表面の曲げひずみε_bは、

$$\varepsilon_b = \frac{t}{2\rho_c} \tag{11}$$

であるので、式(9)の曲げモーメントは次式のように表すこともできる。

$$M = \frac{At^2}{2(2+n)}{\varepsilon_b}^n \tag{12}$$

モーメントのつりあい式は、

$$\frac{dM}{dx_c} + Q = 0 \tag{13}$$

であり、式(1)の中立面上の微分、

$$\frac{d}{dx_c}\left(\frac{1}{\rho_c}\right) = \frac{d}{dx_c}\left(\frac{1}{r_c} - \frac{d\psi}{dx_c}\right) = -\frac{d^2\psi}{{dx_c}^2} \tag{14}$$

の関係を用いて式(13)を計算すると、次式のϕに関する微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2\psi}{{dx_c}^2} = f^2\psi \tag{15}$$

$$f = \sqrt{2+n}/nt \tag{16}$$

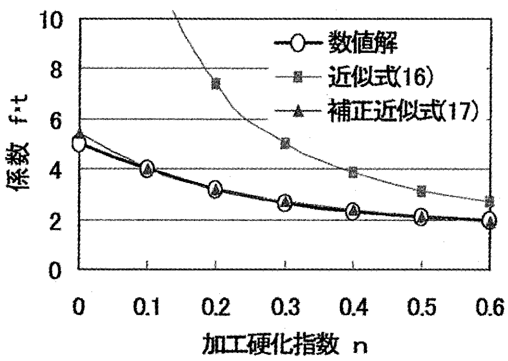

Fig. 4　加工硬化指数nと係数f·tの関係

式(15)は不均等曲げにおいて生ずるせん断角ϕの分布を決める式であるが、数値的には係数fの大きさによって左右される。

fは加工硬化指数nと板厚tのみの関数であり、文献[3]で詳しく考察しているが、本近似解析では式(5)の仮定を採用しているために、Fig. 4 の近似解のように数値解析で求めた係数よりも大きめに現れている。特に、nが小さくなると急激に大きくなってしまう。

そこで、本論文では式の形は式(15)を採用するが、fは数値解析の結果に合わせるため、次式の補正式を採用する。

$$f = \frac{\sqrt{2+n}}{(n+0.26)t} \tag{17}$$

式(17)で定義した補正近似解と数値解とは、Fig. 4 に示すように殆ど一致している。

4．2　微分方程式(15)の解

式(15)の微分方程式の一般解はc_1、c_2を積分定数として、次式になる。

*1　Fig. 3 においてPQは直線と仮定しているが、直線であってもϕは一定にはならない[2]。

*2　平面ひずみの下での相当ひずみは $\varepsilon_g = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\psi^2}{4}}$ で表されるが、本解析は曲げを対象にしているので、曲げひずみεに対してせん断角ϕは小さいとしている。従って、ε^2に対して$\phi^2/4$を無視している。

$$\psi = c_1 e^{fx_c} + c_2 e^{-fx_c} \qquad (18)$$

Fig.1 のような曲げ半径が一定な曲率部と平坦部を併せ持つような曲げにおいては、境界条件は、Fig.1(a)を参照して、

・中心部（$x_c=0$）で $\phi=0$
・曲率部（$0 \leqq x_c \leqq x_c^*$）で $1/r_c$=一定
・平坦部（$x_c \geqq x_c^*$）で $1/r_c=0$
・曲率部から十分離れた平坦部（$x_c=\infty$）で $\phi=0$

である。また、曲率部と平坦部の境界（R止まり）$x_c=x_c^*$で $1/r_c$ は不連続であるが、ϕ、$1/\rho_c$ は連続である。

以上の条件の下で、式(18)および、式(1)の中立面上での関係式、

$$\frac{1}{\rho_c} = \frac{1}{r_c} - \frac{d\psi}{dx_c} \qquad (19)$$

から ϕ と $1/\rho_c$ を計算すると次のようになる。

(1)　曲率部（$0 \leqq x_c \leqq x_c^*$）では、

$$\psi = \frac{e^{-fx_c^*}}{2fr_c}\left(e^{fx_c} - e^{-fx_c}\right) \qquad (20)$$

$$\frac{1}{\rho_c} = \frac{1}{r_c}\left(1 - \frac{e^{fx_c} + e^{-fx_c}}{2e^{fx_c^*}}\right) \qquad (21)$$

(2) 平坦部（$x_c \geqq x_c^*$）では、

$$\psi = \frac{1 - e^{-2fx_c^*}}{2fr_c} e^{-f\left(x_c - x_c^*\right)} \qquad (22)$$

$$\frac{1}{\rho_c} = f\psi = \frac{1 - e^{-2fx_c^*}}{2r_c} e^{-f\left(x_c - x_c^*\right)} \qquad (23)$$

となる。

一例として、Fig.5 に曲げモーメント、外表面曲げひずみ、せん断角の分布を示す。計算条件は、　曲げ角 $\theta^*=90°$（$x_c^*=1.96t$）、板中央面曲げ半径 $r_c=2.5t$、加工硬化指数 $n=0.2$ である。また、図中の曲げモーメントは次式のように無次元化した値である。

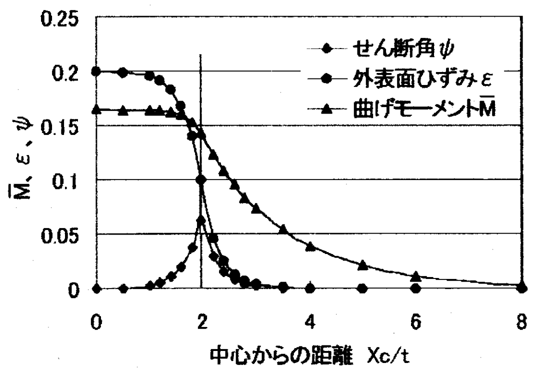

Fig.5　曲げモーメント、ひずみ、せん断角の分布

$$\overline{M} = \frac{M}{At^2} = \frac{\varepsilon_b{}^n}{2(2+n)} \qquad (24)$$

R止まりで ϕ は最大値を示し、曲げひずみ ε_b はR止まり近傍で急激に変化しているが、R止まりで中心部の約1/2の値である。曲げモーメントは曲率部ではほぼ一定の値をもつが、平坦部では ε_b の急激な減少程度に比べて広い範囲に渡って徐々に減少している。この理由は、モーメントは $\varepsilon_b{}^n$ に比例するが、$\varepsilon_b{}^n$ は応力に対応する量であり、小さなひずみでも大きく現れるからである。

スプリングバック量は曲げモーメントの積分値 $\int M dx_c$ に比例するので、モーメントの曲線で囲まれる面積に対応する。Fig.5 の場合では平坦部のスプリングバック量は曲率部のそれの約 70%であり、平坦部のスプリングバックの大きいことを示している。ちなみに、均等曲げ理論では曲げモーメントは曲率部のみで発生し、平坦部では0である。従って、スプリングバック量も平坦部では0であり、全体のスプリングバックは小さめに現れる。

4．3　スプリングバック解析

次にスプリングバック量を計算する。Fig.1 の曲げ角 θ^*がスプリングバックにより $\theta^*+\delta\theta^*$に弾性的に変化したとすると、スプリングバック量 $\delta\theta^*$は次式で計算される。なお、スプリングバックも平面ひずみ変形としている。

$$\delta\theta^* = \frac{2(1-\nu^2)}{EI}\left(\int_0^{x_c^*} M dx_c + \int_{x_c^*}^{\infty} M dx_c\right) \qquad (25)$$

上式で E はヤング率、I は板の断面2次モーメント、ν はポアソン比である。右辺括弧の中の第1項が曲率部のスプリングバック量であり、第2項が平坦部のスプリングバック量である。

それぞれの領域の曲げモーメント M は式(21)、(23)を式(9)に代入すればよい。そして、それを積分するためには$(1/\rho_c)^n$ を積分しなければならないが、解析的に積分できるようにするため、次式のように近似する。

$$1 - e^{-2fx_c^*} \approx 1 \qquad (26)$$

$$\left(1 - \frac{e^{fx_c} + e^{-fx_c}}{2e^{fx_c^*}}\right)^n \approx 1 - \frac{ne^{-fx_c^*}\left(e^{fx_c} + e^{-fx_c}\right)}{2} \qquad (27)$$

式(26)、(27)の関係と単位幅当たりの断面2次モーメ

ントＩの式、

$$I = t^3/12 \qquad (28)$$

を用いて、式(24)を計算すると、次式になる。

$$\delta\theta^* = \frac{12\left(1-\nu^2\right)A}{(2+n)Et}\left(\frac{t}{2r_c}\right)^n\left(x_c^* - \frac{n}{2f} + \frac{1}{2^n nf}\right)$$

(29)

式(29)右辺最後の括弧の中の第1､2項が曲率部のスプリングバック量であり、第3項が平坦部のそれである。また、第1項 x_c^*だけのものが均等曲げ理論によるものであり、第2、3項が不均等曲げ理論によってさらに生じた量である。そして、この量は x_c^*に無関係にｎによってのみ決まる。第2項 - n/2f は曲率部のスプリングバック減少分であるが、それよりも平坦部のスプリングバック増加分である第3項 $1/2^n nf$ の方が大きいため、不均等曲げ理論ではスプリングバックは均等曲げ理論に比べて大きく現れる。

5. 計算結果および考察

Fig.6 は 90° V 曲げにおいて、曲げ半径を変化させたときのスプリングバックを計算したものである。均等、不均等曲げ理論による計算結果の他に、FEM シミュレーションによる結果も合わせて示している。

均等曲げおよび不均等曲げ理論で用いた材料定数は HT540 相当を対象として、ｎ乗硬化式(4)において、

$n=0.2$、$\sigma^*=894$MPa、$E=206$GPa、$\nu=0.3$ (30)

としている*3。一方、FEM シミュレーションで用いた材料定数も式(30)と同じであるが、Swift の式を用いているので、降伏応力を 229MPa としている*4。また、FEM シミュレーションではダイに密着するまで押し切ると、平坦部の一部に曲げ戻し変形を生じるので [4]、それを避けるため密着する前に（いわゆるエアベンディングの状態で）フランジ角度がほぼ 90° になった時点（Fig.7 の状態）で除荷を行った。

Fig.6 の結果から、均等曲げの結果に比べて不均等曲げの結果は曲げ半径の大きさにかかわらずほぼ一定値だけ大きく現れているが、その量は前述したように式(29)右辺最後の括弧の中の第2、第3項である。そ

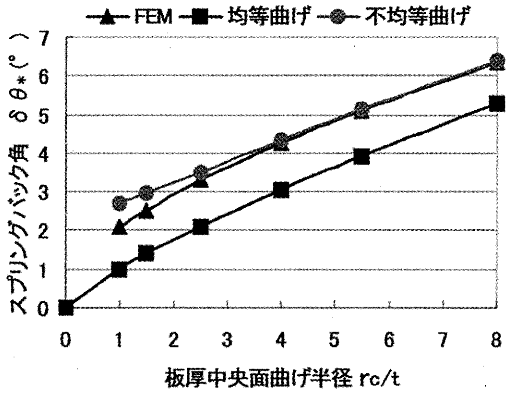

Fig.6 曲げ半径とスプリングバックの関係

して、不均等曲げの計算結果は FEM シミュレーションの結果とよく合っており、不均等曲げ理論の妥当性が裏付けられている。

ただし、曲げ半径の小さな領域では FEM の結果と少し離れてくる。その第1の原因は、不均等曲げ理論では板厚方向の応力を無視しているためと思われる。曲げ半径が小さくなると、パンチとの接触圧力も大きくなり、また、中立面近傍の板厚方向圧縮応力も高くなる。そして、この圧縮応力が高くなると曲げモーメントは小さくなり、それに伴ってスプリングバック量も小さくなる [5]。

Fig.7 は FEM シミュレーション結果の一例であるが、R 止まりを示す直線に対して、この近傍の要素の板厚方向の線が傾いているのが分かる。この傾きがせん断

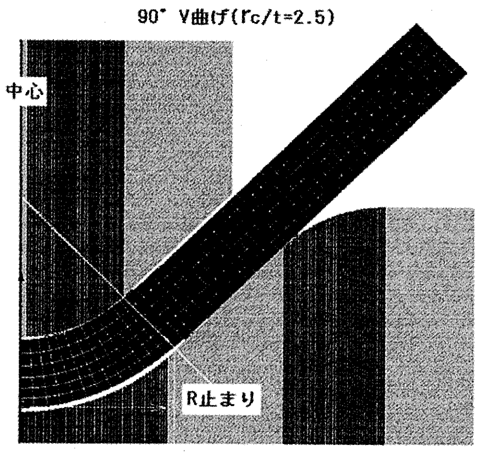

Fig.7 FEM シミュレーション結果

*3 鋼の一般的なｎ値を 0.2 とし、HT540 を想定して $\varepsilon=n$（一様伸び限界）のときに $\sigma_g=(1+n)\times540$MPa（引張強さの真応力）になるように、$\sigma^*=\sigma_b(1+n)/\varepsilon^n$（$\sigma_b$は引張強さ）から塑性定数 σ^*決めている。

*4 ｎ乗硬化式(4)において、$\varepsilon_y=\sigma_g/E=\sigma^*\varepsilon_y^n/E \rightarrow \varepsilon_y=\left(\sigma^*/E\right)^{1/(1-n)}$ を降伏ひずみとみなし、FEM シミュレーションでは εp を塑性ひずみとして、Swift の式 $\sigma_g=\sigma^*\left(\varepsilon_y+\varepsilon_p\right)^n$ を用いている。このとき、降伏応力 σ_yは $\sigma_y=E\varepsilon_y=229$MPa になる。

角ϕに相当するもので、このことからも不均等曲げ理論が妥当であると言える。

Fig.8 は曲げ角度を変化させたときのスプリングバックを計算したものである。板厚中央面上の曲げ半径r_cを 1.5t、2.5t、3.5t の 3 種類について示している。原点を通る下側の 3 本が均等曲げ理論によるものであり、上側の 3 本がそれぞれのr_cに対応する不均等曲げ理論によるものである。

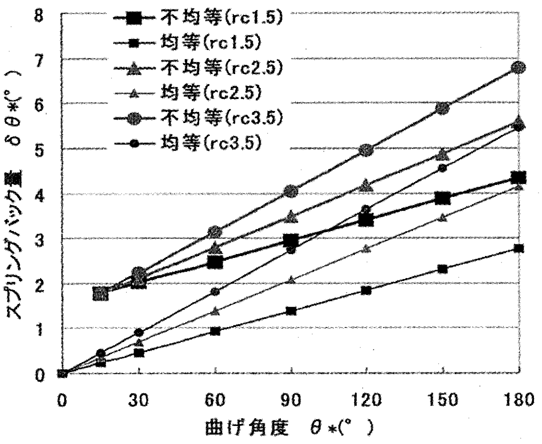

Fig.8　曲げ角とスプリングバックの関係

この結果から Fig.6の結果と同じようにほぼ一定値だけ不均等曲げの方が大きく現れているが、特徴的なことは、不均等曲げでは曲げ角が小さな範囲（およそ 30°以下）では曲げ半径が変化してもスプリングバック量はほとんど変わらない。

一般に曲げ半径が小さいほど曲げ領域も小さくなるので、スプリングバック量は減少するが、Fig.8 の結果から、曲げ角度が小さい場合にはスプリングバックを小さくする目的で曲げ半径を小さくしても意味がないと言える。

6．あとがき

均等曲げ理論は曲げ変形の基本的特性を考察するのには有効であるが、曲率部と平坦部を併せ持つような実際の曲げ加工、すなわち曲げモーメントが急変するような個所を有する曲げに対しては不向きである。そのような曲げに対してはせん断変形を考慮した、いわゆる不均等曲げ理論が妥当である。本論文ではその不均等曲げ理論の下で、V 曲げのような曲率部と平坦部を併せ持つ曲げに対してスプリングバック量を簡便に求めることのできる近似式を誘導した。

そして、均等曲げ理論および FEM シミュレーションによる結果と比較することにより、このスプリングバック近似式が妥当であることを明らかにした。

本論文では十分長い平坦部を持つような曲げを対象にしたが、平坦部が短いあるいは平坦部のない曲率部だけの曲げなどに対してもスプリングバック量を簡単に計算できる。式(18)の一般解の積分定数をそれぞれの境界条件に合わせて決めてやればよい。

ちなみに、曲率部だけの曲げでは、スプリングバックの式は式(29)において、右辺最後の括弧の中は、(x_c^*-n/f)となり、均等曲げ理論による結果に比べて、n/f だけ小さくなるだけである。板の長さ x_c^*が極端に小さくない限り、n/f は無視できる。つまり、この場合には均等曲げ理論でも不均等曲げ理論でもスプリングバックに対して、差はほとんどない。

参考文献

1) 永井康友：板および管の軸対称塑性曲げに関する解析、塑性と加工、**22**-248(1981)、912-920.

2) 永井康友：帯板の U 形曲げの解析、塑性と加工、**23**-252(1982)、23-28.

3) 永井康友：板の曲げひずみおよびスプリングバックに及ぼすせん断変形の影響、塑性と加工、**24**-272(1983)、948-953.

4) 小川秀夫：金属板材のコイニング曲げ加工、塑性と加工、**43**-493(2002)、145-149.

5) 永井康友：わかりやすいプレス加工－曲げ加工、塑性と加工、**38**-442(1997)、967-971.