

ダイナミックスピーカーを利用した棒振動実験

An experiment of the rod vibration by using an electrodynamic loudspeaker

(平成 16 年 9 月受理)

鈴木 三 男* (SUZUKI Mitsuo)

根本 信 行* (NEMOTO Nobuyuki)

増 田 健 二** (MASUDA Kenji)

Abstract

The lower grade students learn the basis of the vibration and wave motion in the physics. Most of them are interested in resonance phenomena, such as vibrations of strings and diapasons. If the rod vibration experiment is demonstrated in front of them, this has the possibility to make them have an interest in the professional field. The upper grade students learn solid elasticity in the applied physics and the professional subject. If the theory of this experiment is understood by them, this has the possibility to be incorporated into the student's experiments. We try a series of experiments to inspect these possibilities and present the result.

1. はじめに

本校では、波動・振動の基礎を低学年で学ばせている。中でも共鳴・共振は、学生の興味を引く物理現象であり、音叉による気柱の共鳴実験や、弦の定常波の観察などを授業で実施している。しかし、共鳴実験や弦の定常波の実験とは異なり、この棒振動では単純な倍振動での共振は起こらない。したがって低学年の学生にとっては、「何故倍振動で共振しないのか」という疑問を抱かせるデモンストレーション実験教材とし活用でき、さらに高度な知識を必要とする専門分野への動機付けを与える教材となりえる。

また、高学年・専攻科の学生は、低学年の物理的基礎の上に、固体の弾性・応力について、応用物理や専門分野の授業の中で学んでいる。したがって、この棒振動は現象としてだけではなく、理論的にも理解できることから、実験用教材としても利用可能と思われる。

従来、3年の応用物理学生実験では、固体のヤング率を測定する方法として、試料に加重を加えて変形を測定する Ewing や Searle の方法を行ってきた。この棒振動は、試料を振動させ、その共振周波数を測定する方法(振動リード法)¹⁾である。今回はダイナミックスピーカーを改良して振動源にし、棒の振動を半導体位置検出素子(PSD)^{2),3)}とオシロスコープを用いて測定した。この測定結果を踏まえ、低学年用デモン

ストレーション実験教材、高学年用実験教材としての導入の可能性を検討した。

2. 原理

今回の棒振動実験の原理を次に示す。^{1),4),5)}

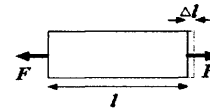


Fig1 ヤング率と応力

Fig1のように、長さ l 、断面積 S の棒の両端に張力 F (N) 加えたところ、 Δl (m) だけ伸びたとき、応力 F/S とひずみ $l/\Delta l$ の間には

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l} \dots \dots (1)$$

の関係が成り立つ。ただし、 E はヤング率である。

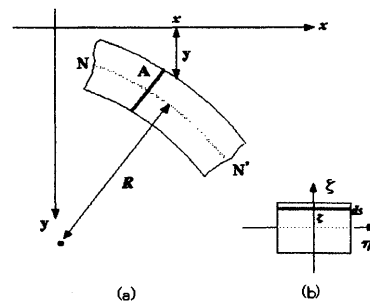


Fig2 棒の曲げ

* 福島工業高等専門学校 一般教科物理 (いわき市平荒川字長尾 30)

** 静岡大学工学部共通講座 (浜松市城北 3-5-1)

次に Fig2-(a) のように、一様な棒を曲げた場合を考える。Fig2 中 A は任意の断面、NN' は曲げによって伸縮しない中立面、R は中立面における曲率半径である。Fig2-(b) のように断面 A で、中立面 NN' との交線を η 軸にそれと垂直に ζ 軸をとる。中立面 NN' よりも上層 (ζ > 0) では張力を、下層 (ζ < 0) では圧力を受けている。

断面 A で中立面 NN' より ζ 離れた面 ds でのひずみは、

$$\frac{(R+\zeta)\theta - R\theta}{R\theta} = \frac{\zeta}{R}$$

であるから、(1)式から ds に働く張力 f_ζ

$$f_{\zeta} = E \frac{\zeta}{R} ds$$

となる。したがって断面 A での曲げモーメント M は、

$$M = \int E \frac{\zeta}{R} ds \cdot \zeta = \frac{E}{R} \int \zeta^2 ds = \frac{E}{R} I, I = \int \zeta^2 ds$$

となる。ただし、I は断面 2 次モーメントである。

また、x におけるたわみを y とすると、数学的に

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2y}{dx^2} \left/ \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} \right. \cong -\frac{d^2y}{dx^2}$$

と表されるので、曲げモーメント M は次式となる。

$$M = \frac{EI}{R} = -EI \frac{d^2y}{dx^2} \dots \dots (2)$$

棒の断面内では、曲げモーメントとにずれ応力 Q が作用している。Fig3 のように、断面 A から dx 離れた断面 B で囲まれた微小部分でのモーメントの平衡から

$$M + Qdx = M + \frac{dM}{dx} dx \quad \therefore Q = \frac{dM}{dx} \dots \dots (3)$$

が成り立つ。微小部分が y 方向に運動したときの運動方程式は、

$$\rho S dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Q + dQ - Q = dQ = \frac{d}{dx} \left(\frac{dM}{dx} \right) dx$$

となる。ρ は棒の密度、S は断面積である。(2)式より

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

と変形させる。一様な棒であるなら、EI は定数となり、

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \dots \dots (4)$$

が得られる。(4)式が棒振動の基本方程式となる。解を x の関数、t の関数の積の形に変数分離して

$$y(x,t) = X(x)U(t)$$

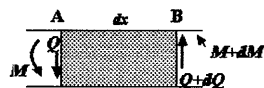


Fig3 曲げモーメントと応力

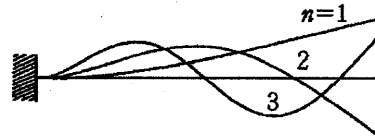


Fig4 振動モード

と仮定し、(4)式に代入する。

$$\frac{EI}{\rho S X} \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} = -\frac{1}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \omega^2$$

$$U = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

$$X = C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x + C_5 \cos \lambda x + C_6 \sin \lambda x \dots (5)$$

が得られる。ただし、

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2 \rho S}{EI} \dots \dots (6)$$

ここで、実験条件に対応した境界条件 (一端固定、他端自由) を (5)式に適用すると

$$1 + \cosh \lambda l \cos \lambda l = 0 \dots \dots (7)$$

を満足しなければならない。ただし、l は棒の長さ。

(7)式の解は、

1次振動: λ₁l = 1.875 = α₁

2次振動: λ₂l = 4.694 = α₂

3次振動: λ₃l = 7.855 = α₃

..... ⇒ λ_n = α_n/l

となり、2次、3次振動は、1次振動の整数倍にならない。Fig4には、この条件での1次~3次振動までの共振状態を示すが、一端が節、他端が腹の定常波ができています。上記関係を(6)式に代入することで、次のヤング率 E と n 次振動の周波数 f_n との関係が得られる。

$$f_n = \left(\frac{\alpha_n^2}{2\pi^2} \right) \cdot \left(\frac{EI}{\rho S} \right)^{\frac{1}{2}} \dots \dots (8)$$

3. 実験

3-1. 方法

Fig5 に装置の概要を示す。装置は試料棒を振動させる駆動部と振動の状態を確認する検出部からなる。

駆動部には、ダイナミックスピーカー (ウーファ 150 φ) を振動源として利用した。スピーカーのコーン部分にアルミ板 (145 φ) を接着し、このアルミ板の中心には、試料固定用ボルト (6 φ、100mm) を取り付けました。

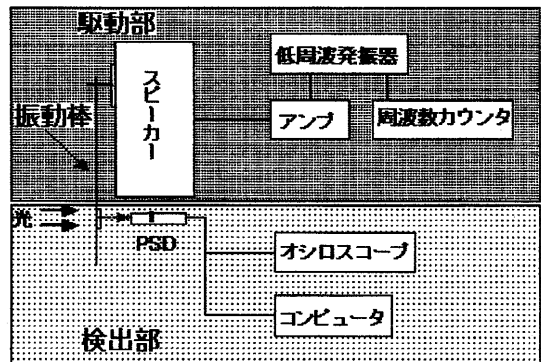


Fig5 装置概要

また固定ボルトには、金属棒と金属薄板兼用でできるように工夫した。任意の周波数の正弦波が、低周波発振器 (YHP 3310B) からアンプ (Nakamura SA-150N) を通してスピーカーに送られ、その周波数で試料棒を左右に振動させた。

検出部には、半導体位置検出素子 (PSD) とオシロスコープ (KIKUSUI COM7101A) を利用した。まず試料棒の物理定数に影響を与えないように、軽いスリットを付いた軽い紙 (紙 25mm×70mm、スリット 0.5mm×12mm) を試料棒に貼り付けた。この紙は、余分な光を遮光し、スリットを通った光だけを PSD に入れる働きをする。棒の動きと連動して、スリット通過光が PSD 上を動く。PSD は通過光の位置を電圧に変換するので、その電圧変化をオシロスコープ上で確認した。また、必要に応じて、PSD の出力を AD コンバーターを使って、コンピュータに取り込み、棒振動の解析を行った。

測定は、まず、低学年用デモンストレーション用として、長さ 800mm~600mm の試料棒を使用し、1次から高次の振動の様子を調べた。次に高学年用実験用として、長さの異なる同材質の試料棒を準備し、1次振動の共振周波数から、ヤング率 E を求めた。

3-2. 共振曲線

アルミ棒 (2φ、796mm) 試料棒に駆動部から振動を加えた時に、第1次振動で測定された代表的な振動波形を Fig6、7 に示す。Fig6 に示す振動波形は、共振周

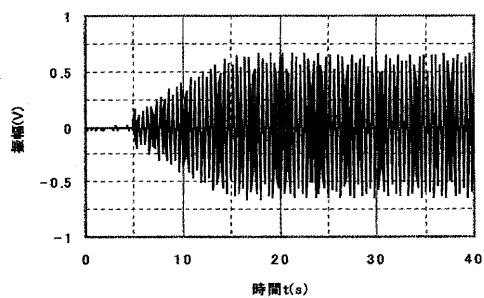


Fig 6 共振時の振動波形

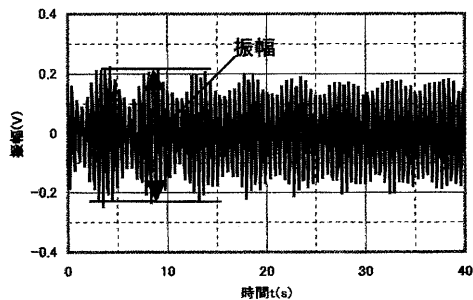


Fig 7 共振からずれた時の振動波形

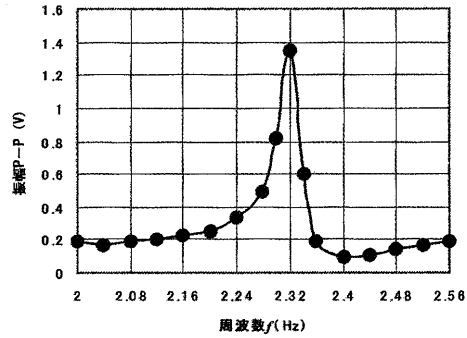


Fig 8 共振曲線

波数 ($f_1=2.32\text{Hz}$) の場合を、また Fig 7 には共振周波数からわずかにずれた時の場合を示す。Fig 6 より共振周波数では、試料棒は徐々に振幅を増大し、一定の振幅で単振動を行うが、共振周波数からずれると、「うなり (ビート)」が生じた。以後共振周波数の判定には、振幅の増大と「うなり」の有無を利用する事とした。

Fig 8 には、共振周波数の前後での、振幅の peak-peak (最大値-最小値) 値の変化を示す (共振曲線)。図からも、共振時には 5 倍以上の振幅の増大が認められ、周波数の判定での困難さは特に感じられない。その故、「誰でもが測定可能である」という学生実験の必要条件はクリアされた。

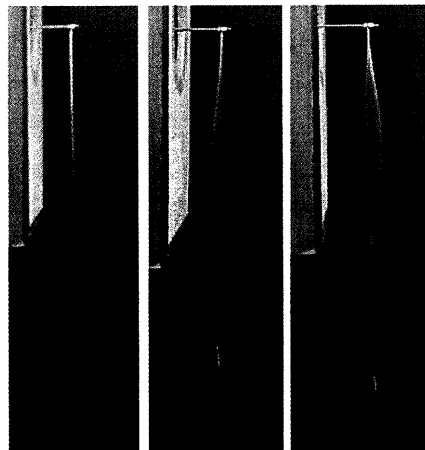
3-3. 高次振動

Fig 9 に試料棒にアルミ棒 (2φ、796mm) を使用した時の 1次、2次、3次振動の様子を示す。それぞれの共振周波数を測定した結果、 $f_1=2.32\text{Hz}$ 、 $f_2=13.6\text{Hz}$ 、 $f_3=39.3\text{Hz}$ であった。(8)式より、理論的には

$$f_1 : f_2 : f_3 = \alpha_1^2 : \alpha_2^2 : \alpha_3^2 = 1 : 6.27 : 17.6$$

なり、1次振動の整数倍にはならない。測定した共振周波数については、

$$f_1 : f_2 : f_3 = 1 : 5.86 : 16.9$$



1次振動 2次振動 3次振動

Fig 9 振動の様子

	共振周波数	ヤング率 E ($\times 10^{10}$)
1次振動	2.32	7.42
2次振動	13.6	6.49
3次振動	39.3	6.91

表1 共振周波数とヤング率

となり、1次振動の整数倍にはなっていないものの、測定値は2次、3次とも理論値よりも若干小さな値となった。

また振動の様子に着目すると、一端が節、他端が腹の定常波が観測され、Fig4に示した振動モードと良い一致が見られた。3次振動では、定常波の腹と節が等間隔に並ぶ弦の振動とは異なり、節-節間隔が異なる特徴的な振動が観察された。この様子を学生の前で実演もしくは、ビデオ画像としてスロー再生できれば、学生は棒振動では共振が単純に倍振動で起こらないことを十分体感できる。したがって、「何故倍振動で共振しないのか、弦の振動とは何か違う」という疑問を抱かせるデモンストレーション実験教材として十分に活用できる。

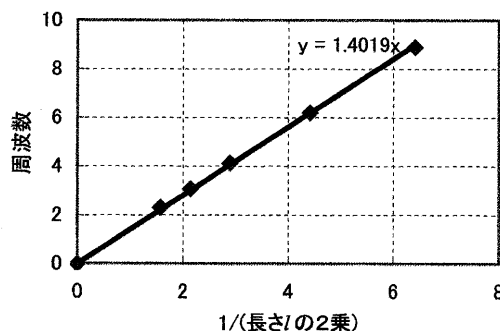
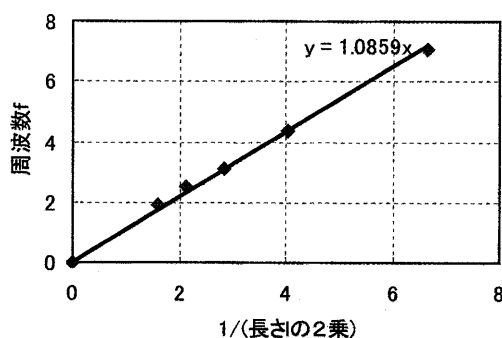
最後に(8)式に代入してそれぞれのヤング率 E を求めた結果を表1に示す。アルミニウムのヤング率 E は $7.03 \times 10^{10} \text{Pa}$ であるから、2次振動の場合が、最も誤差が大きく問題を感じるが、1次・3次振動からの値は、比較的近い値が得られた。スピーカーの性能及び上述の結果を踏まえ、実験的にヤング率 E を算出する次の測定では、1次振動の共振周波数を利用した。

3-3. 1次振動によるヤング率

試料棒として長さ800mmから400mmまで、約100mm違いのアルミ棒(2φ)、鉄棒(1.6φ)を5本準備した。各長さの試料棒について、第1次振動の共振周波数を測定した。測定に際しては、3-2. 共振曲線のところで述べたように、振幅が増大し、「うなり」消えることを基準にして、共振周波数を求めた。試料棒の長さ l と共振周波数の関係結果を Fig10, 11 に示す。Fig10, 11 では縦軸に周波数 f 、横軸には長さ l の2乗分の1 ($1/l^2$) をとり、各測定値の点をとった。Fig10, 11 より各測定値はほぼ一直線上にあり、図の直線は、EXCEL 装備の近似曲線-線形近似(最小2乗法)により求めた。(8)式より、この直線の傾き a とヤング率 E との間には、

$$a^2 = \frac{\alpha_1^4 E I}{4\pi^2 \rho S} \quad \text{ただし } \alpha_1 = 1.875 \dots \dots (9)$$

の関係がある。物理定数 I 、 S および ρ は、試料棒によって定まることから、直線の傾き a によって、ヤング率 E が求まる。

Fig10 長さ l と共振周波数の関係(Al)Fig11 長さ l と共振周波数の関係(Fe)

(9)式からアルミニウムのヤング率 E は $6.94 \times 10^{10} \text{Pa}$ 、また鉄のヤング率 E は $18.5 \times 10^{10} \text{Pa}$ となり、まずまずの値が得られた。物理定数表などの値との誤差を考えると、現在学生実験で実施している Ewing 法によるヤング率の測定結果(異なる材質ではあるが)とも大差はない。工夫や改善の必要性はあるものの、この棒振動実験を学生実験に組み入れることは、十分に可能であると思われる。

4. まとめ

理論的には応力や弾性との知識を必要とする実験ではあるが、明瞭な共振状態を観察することが出来た。その観察から、共振周波数が倍振動になっておらず、また弦の定常波とも微妙に違う事が認められた。「何故この様な振動が起こるのか?」という疑問を抱かせるデモンストレーション実験教材として十分に活用でき、更なる専門知識への学習意欲を掻き立てる動機付けとなり得る。

また、振動リード法によるヤング率の値は、Ewing 法によるヤング率の測定結果とも大差はなく、学生実験への導入も十分可能である。しかし導入に際しては、実際の測定から、幾つかの点を留意する必要がある。

振動源として利用したダイナミックスピーカーは、その特性から低周波(<200Hz)領域向きであり、それ

以上の周波数帯ではスピーカーから発生する音が、他の実験の邪魔になる。(8)式から、試料棒の長さ l が短い程、共振周波数は高くなり、このスピーカー音の問題が生じてくる。試料棒の長さはヤング率 E に対して、4乗のオーダーで関わっているので、長さの精度がヤング率 E に大きな影響を与える。相対誤差からすれば、長さが短くなる程、その影響は大きくなる。それ故、試料棒の長さについては、これらの2点を十分に考慮する必要があった。結果的に今回は800mmから400mmの試料棒を使用した。他の試料を使用する場合にも同様に考慮しなければならない。

また、実験スペースの関係から、振動源をもう少しコンパクトに軽量小型化して、使用し易い形に工夫するとともに、またもう少し低価格の機器で、PSDからの出力波形を観測できるようにして、学生実験への導入に取り組みたい。

5. おわりに

振動源スピーカーの作成に際し、アルミ板、試料固定用ボルトの加工を快く引き受けて頂いた、機械工学科技官渡辺興仁さんに感謝いたします。

参考文献

- 1) 平田森三, 平川浩正, 兵藤申一, 中川康昭, 田幸敏治, 基礎物理学実験, pp66-74, 裳華房, 1966.
- 2) 鈴木三男, 根本信行, 増田健二, 半導体位置検出素子を用いた振動実験の教材化, 福島高等専門学校紀要, 第33号, pp29-35, 1996.
- 3) 増田健二, 鈴木三男, 半導体検出素子(PSD)による振動実験の教材化, 応用物理教育, 第21巻2号, pp3-8, 1997.
- 4) 戸田盛和, 振動論, pp182-187, 培風館, 1973.
- 5) 山田伸志, 振動工学入門, pp101-108, パワー社, 1986.