

実体二重振り子のシミュレーション

The simulation of the physical double pendulum

(平成14年9月受理)

鈴木三男* (SUZUKI Mitsuo)
 湊 淳** (MINATO Atsushi)
 小澤 哲** (OZAWA Satoru)
 増田健二*** (MASUDA Kenji)

二重振り子のデモ実演は、講義の動機づけの手段として用いられているが、デモ実演への理解を深めるために、我々はデモ実演をデジタルビデオカメラで撮影し、コンピュータ処理によって、動画から得られたビデオ画像を解析する新たな方法で、運動の解析を行ってきた¹⁾。この方法により、デモ実演は講義に役立つデータを提供できる実験教材となり得ることが分かった。さらにビデオ画像位置解析法と組み合わせることで、その相乗効果が多いに期待できるとの考えから、我々は二重振り子のシミュレーションを試みた。ビデオ画像解析法による解析結果を踏まえ、実体二重振り子の運動により近い運動を再現するために、二重振り子の運動に関わる基礎予備実験を実施した。シミュレーションの中に、基礎予備実験の結果をうまく取り入れることにより、実体二重振り子の運動により近い再現が可能となったので報告する。

1. はじめに

図1に示すように、二重振り子は単純な構造であるが、振幅が大きくなると、非常に複雑な運動を行い、目にした者に強い印象を与えることから、カオス的現象を理解させるデモ実演教材として活用されている。我々は、デモ実演から具体的な実験データが得られれば、講義展開の上で非常に役立ち、講義内容への理解の手助けになるとの考えから、ビデオ画像位置解析法を試みている。¹⁾²⁾ このビデオ画像位置解析法により、

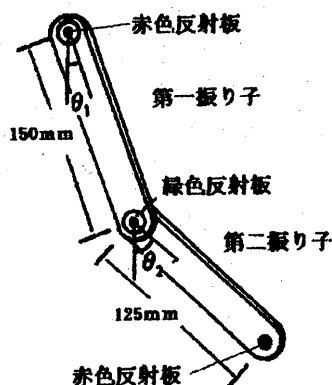


図1 二重振り子の構造

二重振り子の運動には、初期条件によって、カオス的な複雑な運動をする場合と、単振動的な運動をする場合があることが、解析結果からも裏付けられた。²⁾

ここでは二重振り子の運動への理解をさらに深めるため、我々は実験的側面ばかりではなく、理論的側面から、シミュレーションによる二重振り子の運動を考える。シミュレーションでは、デモ実演での実体二重振り子の運動により近いシミュレーションを試みた。

実体二重振り子の運動では、支点部分の摩擦や空気抵抗によるエネルギー損失を無視することは出来ない。そこで双方の項をどのような形で、シミュレーションに組み入れるかを検討するため、基礎予備実験を実施した。シミュレーションの中に、基礎予備実験の結果をうまく反映することで、実体二重振り子の運動により近い再現が可能となった。またシミュレーションには、コンピュータさえ有れば、何度でも再現的に確認でき、またデモ実演では困難な初期条件でも再現できるなどの特徴もあり、ビデオ画像位置解析法を補強する有効な手段となり得る。

これにより、二重振り子の運動を実験的にもまた理論的にも検証することができ、両者の相乗効果が多いに期待できるものと考えられる。

* : 福島工業高等専門学校 (いわき市平上荒川字長尾 30)

** : 茨城大学大学院 理工学研究科 (日立市中成沢町 4-12-1)

*** : 静岡大学 工学部 (浜松市城北 3-5-1)

2. ビデオ画像位置解析法

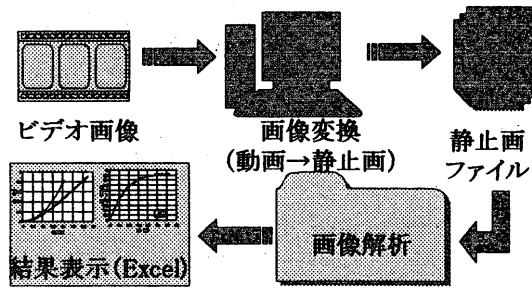


図2 解析手順

2.1 方法

ビデオ画像位置解析法に使用した二重振り子は、全体をつや消しの黒色で塗装し、第一振り子には赤色、第二振り子には緑色の運動解析用反射板が貼りつけられている。(図1参照) ビデオ画像位置解析法による、測定からデータ処理までの流れを図2示す。

暗室の中でデジタルビデオカメラ (SONY 製 DCR-TRV900) を使い、二重振り子にハロゲンランプを照射し、反射板からの反射光をプログレッシブモードで撮影した。コンピュータに動画として取り込み、動画編集アプリケーションソフト (Adobe Premiere5.1J) により、動画を1枚ずつの静止画 (ビットマップファイル形式) に自動変換して、再保管した。画像解析で

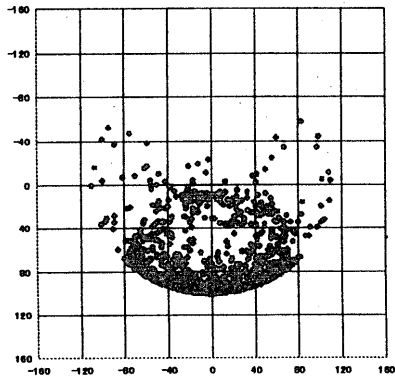


図3 第二振り子の軌跡 ($\theta_1 = \theta_2 = 120^\circ$)

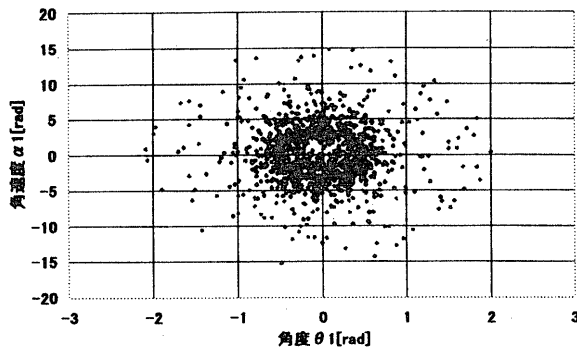


図4 角度と角速度の関係 ($\theta_1 = \theta_2 = 120^\circ$)

は、VisualBasicで自作した、ビットマップファイル形式の輝度情報から、静止画上の反射板の位置を自動的に解析するソフトを使用した。このソフトにより得られた位置情報を、表計算ソフト (Excel) にあるマクロ機能を使用し、何種類かのグラフ (振り子の軌跡、角度の時系列、角度と角速度の関係やパワースペクトル

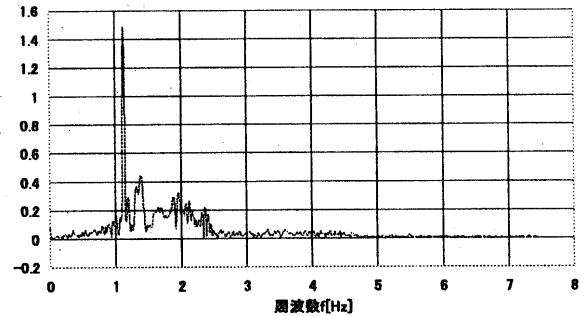


図5 パワースペクトル ($\theta_1 = \theta_2 = 120^\circ$)

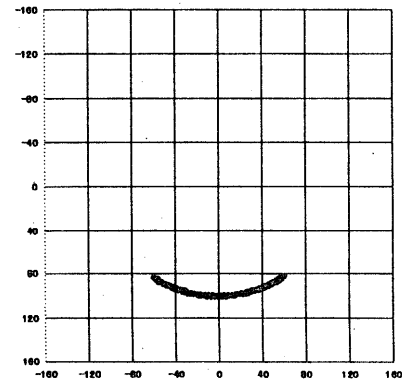


図6 第二振り子の軌跡 ($\theta_1 = \theta_2 = 30^\circ$)

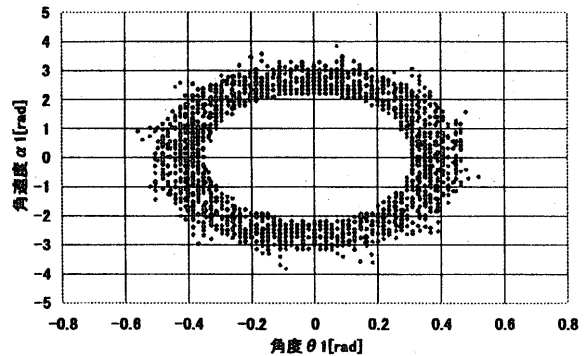


図7 角度と角速度の関係 ($\theta_1 = \theta_2 = 30^\circ$)

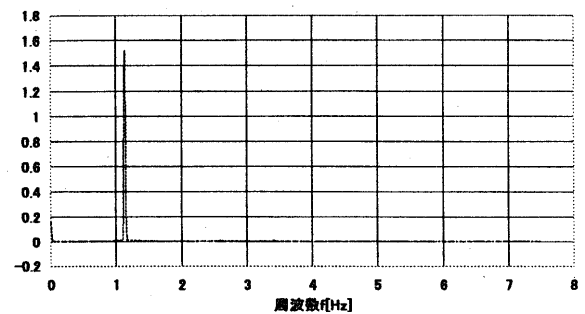


図8 パワースペクトル ($\theta_1 = \theta_2 = 30^\circ$)

ル等)を自動的に表示できるようにした。

2.2 解析結果

ビデオ画像位置解析法による結果を図3～8に示す。

$\theta = 30^\circ$ の場合、第二振り子の軌跡、角度と角速度の関係やパワースペクトルは、一定の振動数で往復する単振動的性質を示している。また $\theta = 120^\circ$ の場合には、見た目に第二振り子の軌跡が複雑なだけでなく、角度と角速度の関係での幅広い分布や、パワースペクトルでの幅広く複雑な特徴は、カオスの性質を示している。

これらの結果から、初期条件 θ_1, θ_2 によって、二重振り子の運動に明らかな違いがあることが良く分かる。 $\theta = 30^\circ$ の場合に見られるように、 θ_1, θ_2 の初期角度が小さい場合には、第一、第二振り子間のエネルギー交換が少なく、一体となった実体振り子の性質が強い。それに対して、 $\theta = 120^\circ$ の場合には、第一、第二振り子間のエネルギー交換が頻繁に起こり、その結果、他の振り子の運動に影響を与え、運動をカオス的な複雑なものにしている。

3. 理想モデルシミュレーション

3.1 理想モデルの運動方程式

図1に示すように、使用した二重振り子は、2つの実体振り子を連結したものであるから、各支点から重心までの距離が h_1, h_2 である、図9に示すモデルを理想モデルと考える。

シミュレーションに必要な運動方程式を導出するため、ラグランジュ関数 L による、解析力学的手法を利用する。図9より各重心の位置を $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とすると、

$$(x_1, y_1) = (h_1 \sin \theta_1, h_1 \cos \theta_1) \quad \dots\dots (1)$$

$$(x_2, y_2) = (l_1 \sin \theta_1 + h_2 \sin \theta_2, l_1 \cos \theta_1 + h_2 \cos \theta_2) \quad (2)$$

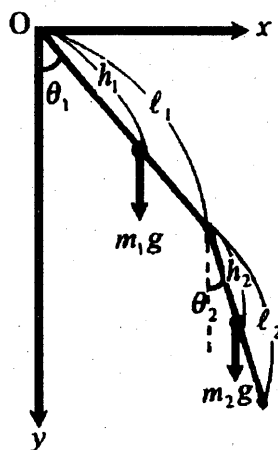


図9 実体二重振り子モデル

となる。ここからポテンシャルエネルギー U と運動エネルギー T を算出し、ラグランジュ関数 L を求めると、

$$L = \frac{1}{2} m_1 h_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + h_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 h_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + ((m_1 h_1 + m_2 l_1) \cos \theta_1 + m_2 h_2 \cos \theta_2) g \quad \dots\dots (3)$$

となる。ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \quad (i=1,2) \quad \dots\dots (4)$$

に代入し、各運動方程式が得られる。具体的には

$$\ddot{\theta}_1 + \mu \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + \mu \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \omega_1^2 \sin \theta_1 = 0 \quad \dots\dots (5)$$

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + l \ddot{\theta}_2 - \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \omega_2^2 \sin \theta_2 = 0 \quad \dots\dots (6)$$

ただし、

$$\mu = \frac{m_2 l_1^2}{m_1 h_1^2 + m_2 l_1^2}, l = \frac{h_2}{l_1}, \omega_1^2 = \frac{m_1 h_1 + m_2 l_1}{m_1 h_1^2 + m_2 l_1^2} g, \omega_2^2 = \frac{g}{l_1}$$

であり、(5), (6)式を基にルンゲ・クッタ法を用いて、シミュレーションを行う。

3.2 理想モデルによる結果

ビデオ画像位置解析法による結果との比較のために、特に初期条件 $\theta_1 = \theta_2 = 120^\circ, \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ の時のシミュレーション結果に注目する。まず図10には第二振り子の軌跡を示す。シミュレーションでは心臓曲線のような図形の内部に一様に分布しており、偏りは見られない。対応する図3では力学的エネルギーが大きなハート型の両上部の分布は少なく、比較的力学的エネルギーの小さな下の部分に集中している。これは実際の二重振り子の運動では、摩擦や抵抗によるエネルギー損失が無視できないことを示している。そこで第一、第二振り子の力学的エネルギー及び全エネルギー

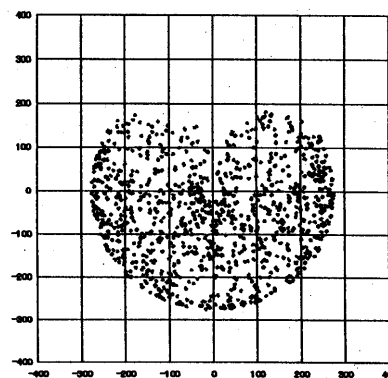


図10 シミュレーションによる第二振り子の軌跡

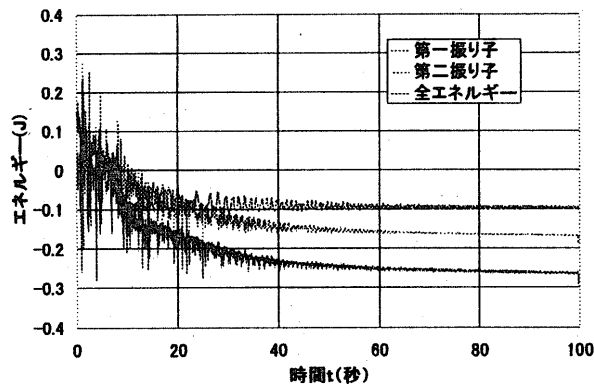


図11 エネルギー変化 (ビデオ画像位置解析法)

変化を調べ、その結果を図11、12に示す。それぞれ図11はビデオ画像位置解析法、図12はシミュレーションである。実際の二重振り子は、運動開始から20秒間くらいまでは、エネルギー交換も頻繁に行われているが、時間とともにエネルギーが失われ、40秒以降は目立った変化は見られない。一方シミュレーションでは、プログラム上エネルギー損失が全くないので、常時エネルギー交換が行われ、その結果として図10のような軌跡が得られる。

実際の二重振り子の運動に近づけるためには、プログラムの中にエネルギー損失を組み入れ、エネルギー変化を図11に近づける必要がある。エネルギー損失を含む運動方程式を導出するため、基礎予備実験を実施し、支点部分の摩擦と振り子の空気抵抗を詳しく調べた。

4. 基礎予備実験

4.1 摩擦

支点部分の摩擦は、主に軸を支えるミニチュアベアリングによるものである。図13に示すように、同型ベアリングに鉄リング (外直径48φ、73.2g) をはめ込み、人為的に初角速度を与え、これをデジタルビデオカメラで撮影した。

鉄リングを含む慣性モーメント I の回転体が、角速度 ω で回転し、中心軸から受ける摩擦による力のモーメント $F_m r$ によって、回転速度が減速していく回転

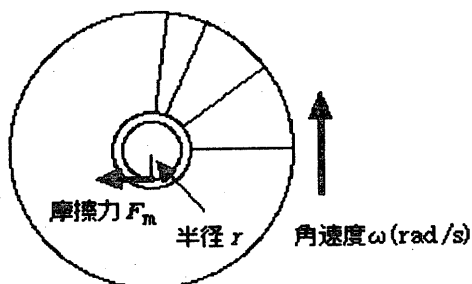


図13 摩擦の測定

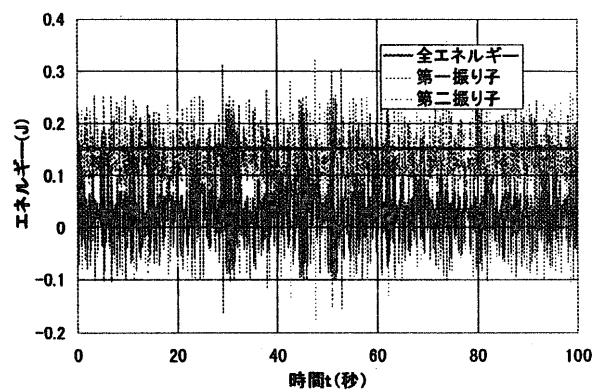


図12 エネルギー変化 (シミュレーション)

の運動方程式は、

$$-F_m r = I \left(\frac{d\omega}{dt} \right) \quad \dots (7)$$

である。鉄リングの角速度の変化を画像解析により調べ、(7)式より摩擦の状況を推定することとした。

4.2 摩擦の測定結果

ビデオ画像位置解析法を利用して、鉄リングの角速度の変化を求めた。その結果を図14に示す。角速度はほぼ一定の傾きで、時間とともに減速していくことから、角加速度 ($d\omega/dt$) は一定であり、摩擦力 F_m は角速度 ω によらず一定である。したがって

$$F_m = C_m \quad (\text{定数}) \quad \dots (8)$$

と表せる。

4.3 空気抵抗

二重振り子は空気中を運動し、動くことによって、空気から抵抗を受けているが、空気抵抗の測定では、図15に示すように、その逆に様な空気の流れの中に振り子を置き、振り子が受ける力から空気抵抗を推定した。張力、重力 mg 、空気抵抗 F_a の3力のつあいから、

$$F_a = mg \tan \theta = mg \frac{x}{l} \quad \dots (9)$$

が成り立つ。したがって変位 x から空気抵抗 F_a が求

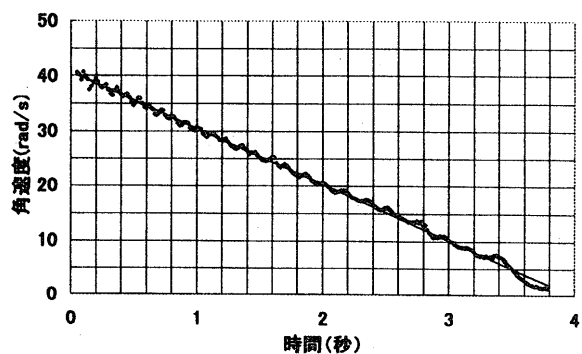


図14 角速度の時間変化

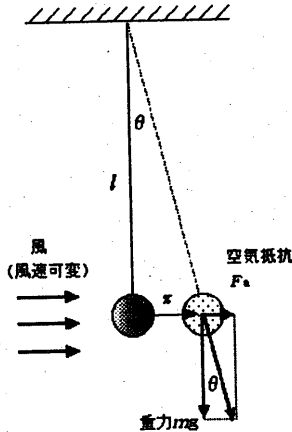


図 15 空気抵抗の測定

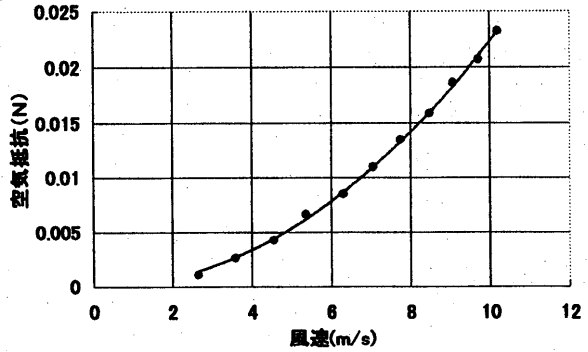


図 16 空気抵抗と風速の関係

められる。

4.4 空気抵抗の測定結果

実験では、簡易風洞装置を使い、風速可変でかつ一様な風を作り出し、第二振り子の受ける空気抵抗を調べた。その結果を図 16 に示す。空気抵抗 F_a は風速 v に対して、2 次関数的に増加していることが分かる。なお図中の近似補間曲線は、2 次多項式近似によるものである。したがって、

$$F_a = C_a v^2 \quad \dots\dots (10)$$

と表せる。

5. 実体モデルシミュレーション

5.1 実体モデルの運動方程式

実体モデルの運動方程式を導出するために、(4) 式にエネルギー損失項 K を含め、(4) 式を次に示すラグランジェ方程式に変形する。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} + \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_i} = 0 \quad (i=1,2) \quad \dots\dots (11)$$

ただし、エネルギー損失項 $K = K_m + K_a$ である。ここで K_m は摩擦項、 K_a は空気抵抗項をそれぞれ意味する。

まず摩擦項 K_m は (8) 式を考慮すれば、

$$K_m = C_1 |\dot{\theta}_1| + C_2 |\dot{\theta}_2| \quad \dots\dots (12)$$

と表せる。ここでの絶対値記号は、常に角速度とは逆向きに摩擦力が生じることを意味している。

次に空気抵抗項 K_a は (10) 式より風速の 2 乗に比例するが、支点を中心に運動する振り子では、振り子の各部分の速度は異なるが、角速度は同じである。振り子の微小部分に加わる空気抵抗の総和が、振り子全体に加わる空気抵抗と考えれば、空気抵抗は角速度の 2 乗に比例する。

このことを基にして、図 17 に示すように各振り子

の角度が θ_1 、 θ_2 で、角速度が $\dot{\theta}_1$ 、 $\dot{\theta}_2$ である場合の空気抵抗を考える。第一振り子に働く空気抵抗は、単に第一振り子だけではなく、下に連結されている第二振り子の影響も考慮し、第二振り子の正射影 $l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$ を第一振り子の l_1 に加え、それを有効な振り子の長さとして求める。一方、第二振り子の場合には、そのまま l_2 を有効な振り子の長さとして求める。

したがってこれら総合すると、空気抵抗項 K_a は、

$$K_a = \frac{1}{3} C_3 \left(1 + \frac{l_2}{l_1} |\cos(\theta_1 - \theta_2)| \right)^3 |\dot{\theta}_1|^3 + \frac{1}{3} C_4 |\dot{\theta}_2|^3 \quad \dots\dots (13)$$

となる。絶対値については (12) 式と同じ理由。(11) 式に代入し、各運動方程式は、

$$(5) + \frac{\mu}{m_2 l_1^2} C_1 \frac{\dot{\theta}_1}{|\dot{\theta}_1|} + \frac{\mu}{m_2 l_1^2} C_3 \left(1 + \frac{l_2}{l_1} |\cos(\theta_1 - \theta_2)| \right)^3 |\dot{\theta}_1| \dot{\theta}_1 = 0 \quad \dots\dots (14)$$

$$(6) + \frac{l}{m_2 h_2^2} C_2 \frac{\dot{\theta}_2}{|\dot{\theta}_2|} + \frac{l}{m_2 h_2^2} C_4 |\dot{\theta}_2| \dot{\theta}_2 = 0 \quad \dots\dots (15)$$

となり、(5)、(6) 式にエネルギー損失項が加わった。

5.2 実体モデルの結果

実際の二重振り子では、同型のベアリングを使用し、第一、第二振り子の形状は、ほぼ同じで大差のないことから、(14)、(15) 式でのパラメーター C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 は、 $C_1 = C_2$ 、 $C_3 = C_4$ という条件で、シミュレーションは行う。

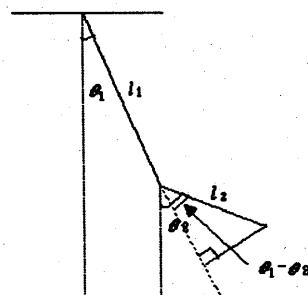


図 17 二重振り子の空気抵抗

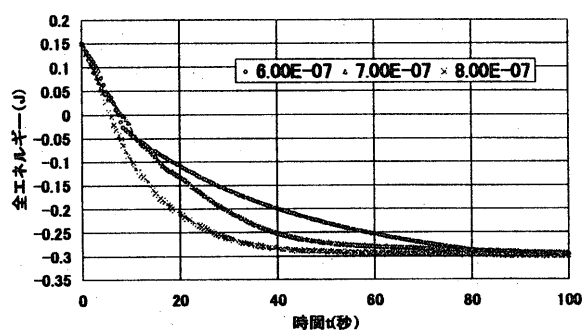


図18 実体モデルの全エネルギー変化

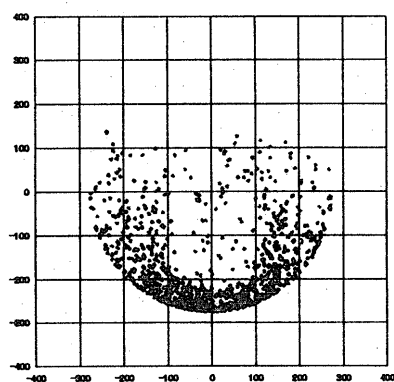


図19 第二振り子の軌跡(実体モデル)

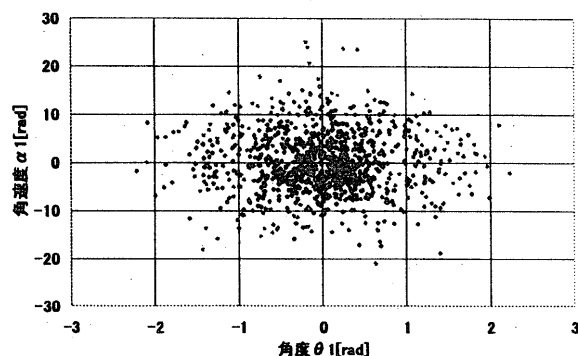


図20 角度と角速度の関係(実体モデル)

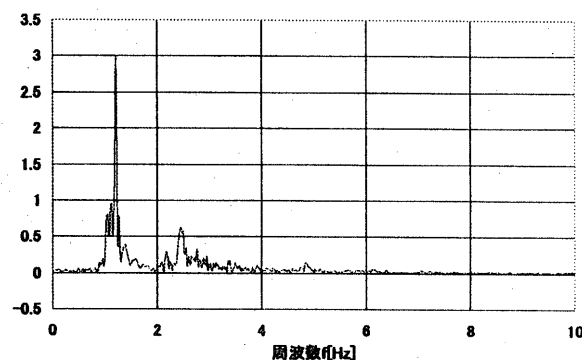


図21 パワースペクトル(実体モデル)

実体モデルによるエネルギー変化を図18に示す。図では $C_1=C_2=1.0 \times 10^{-4}$ と同じで、 C_3 および C_4 の値を変化させた場合を示している。図11と比較し、40秒くらいまで急激なエネルギー変化をした後、なだらかに変化していく $C_3=C_4=7.0 \times 10^{-7}$ の場合が、最も実際の運動に近いと考えられる。

この条件の下、第二振り子の軌跡を図19に示す。理想モデルの図10に比べ、エネルギー損失の効果が分布にも表れており、図3により近いものになっている。同様に角度と角速度の関係、パワースペクトルを図20、図21に示す。角度と角速度の関係では、ランダムな分布の中に、中心付近にコア状の密なる分布が表れ、図4分布と類似した傾向が見られる。また、パワースペクトルでは、カオス的な幅広い広がりとともに、エネルギー損失のため、単振動的な運動に移行していくので、その周波数に合致した周波数で強いピークが表れている。これは図5と良く類似している。

6. まとめ

基礎予備実験の結果を取り入れることで、シミュレーションによる運動を、以前よりも、実際の運動に近づけることが出来た。ビデオ画像位置解析法による結果とも多くの類似点があり、また実演では困難な初期条件でも再現できる特徴があるので、ビデオ画像位置解析法を補強する有効な手段と成り得る。

また、シミュレーションにはVB、また解析用にはEXCELマクロを使用しており、誰でもが簡単な操作で利用できるようになっており、コンピュータネットワーク上で使用も検討している。

参考文献

- 1) 鈴木三男, 増田健二: 物理教育 48 (1) 1 (2000)
- 2) 鈴木三男, 増田健二, 湊淳, 小澤哲: 応用物理教育 25 (1) 3 (2001)