特異積分方程式を利用しただ円形境界からなる応力集中問題の数値解析法 (2)

Numerical Solution of Stress Concentration Problems Consist of Elliptical Boundary Using Singular Integral Equation (2)

(平成14年9月受理)

松　尾　忠　利* (MATSUO Tadatoshi)

Abstract

This paper deals with numerical solutions of singular integral equations in interaction problems of elliptical holes under general loading. The problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type singularities, where the densities of body forces distributed in the x- and y-directions are to be unknown functions. In order to satisfy the boundary conditions along the notches, several types of fundamental density functions are proposed; then, the body densities are approximated by a linear combination of the fundamental density functions and polynomials. The accuracy of the present analysis is verified by comparing with the results obtained by the previous method. The present method is found to give rapidly converging numerical results for stress distribution along the hole boundaries.

1. 緒　　言

前報[1]において体積力法の特異積分方程式を用いた外側切欠き問題の高精度解析法を考察した。その結果、未知関数である体積力密度を基本密度関数と多項式の積で近似する数値解析法の有効性が確認された。そこで本報では応力集中の干渉問題の最も基本的な問題である、無限板中の2だ円孔の干渉問題の高精度解析法を考察する。しかし、この問題は、前報の外側切欠きの問題と異なり個々のだ円孔では、x_i軸について対称であるが、y_i軸については対称ではない (i=1, 2)。したがって、前報の解析法とは異なる手法を取り入れる必要があると考えられる。この点を、図1の半無限板の斜め縁き裂の問題を例にとって説明する。この問題は混合モード問題であるので、き裂となるべき境界面上には、モードⅠ型とモードⅡ型の集中力対を分布させる[2][3]必要がある。同様にして、図2の2だ円孔の干渉問題においても境界条件を満足させるためには、き裂問題と同じ表現を用いるとすれば、点A, Bではモード I 型のみ、点Cではモード I, II 型の集中力を分布させるが必要あると考えられる。

上述の点を確かめるために、まず図2の問題を従来の体積力法で用いられている基本密度関数［無限板中の1だ円孔を厳密に表現する体積力密度 (モード型I)］と多項式の積で近似する方法で解析する。本解析法では境界上の応力が容易に求められることから、境界上の応力分布を求め境界条件の満足度を確認する。その結果、モードⅠ型のみの基本密度関数を用いる方法では、境界条件を完全には満足させることができない場合があることを示す。

その解決策として、境界条件を完全に満足させるために、新しい基本密度関数 (モードⅡ型) を定義する。この基本密度関数を用いて同じ問題を解析し、従来の体積力法では完全には満足させることができなかった境界条件を、この解析方法では完全に満足させることができることを示す。

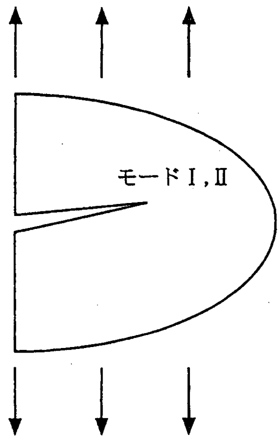


図1　半無限板の斜め縁き裂

* 福島工業高等専門学校　機械工学科 (いわき市平上荒川字長尾30)

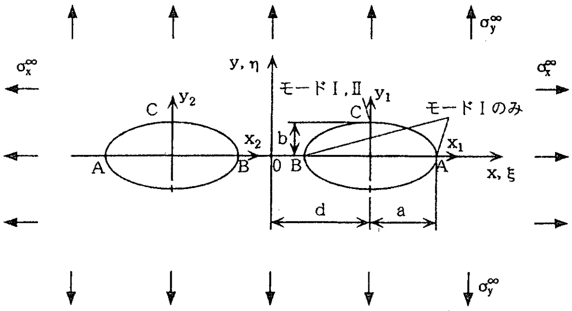


図2　無限板中の2だ円孔

2.　従来の基本密度関数のみを用いる場合の解析法

本解析方法を図2に示すような遠方で一様なx方向の引張応力σ_x^∞およびy方向の引張応力σ_y^∞を受ける無限板中の2だ円孔の干渉問題を例にとって説明する。この問題は、重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により、無限板中のx軸について対称な2点［$\xi=\pm(d+a\cos\phi)$, $\eta=b\sin\phi$］にx, y方向の集中力が働くときの任意の点（$x=d+a\ \cos\theta$, $y=b\sin\theta$）の応力場の解を用いて解くことができる[3,4]。このとき問題は、だ円孔となるべき仮想境界上に分布させたx, y方向の体積力密度$\rho_x(\phi)$, $\rho_y(\phi)$を未知関数とする特異積分方程式(1)で表現される。

$$(-1/2)\{\rho_x(\theta)\cos^2\theta_0+\rho_y(\theta)\sin^2\theta_0\}+\int_0^{2\pi}K_{nn}^{Fx}(\phi,\theta)\rho_x(\phi)b\cos\phi\,d\phi+\int_0^{2\pi}K_{nn}^{Fy}(\phi,\theta)\rho_y(\phi)a\sin\phi\,d\phi=-(\sigma_x^\infty\cos^2\theta_0+\sigma_y^\infty\sin^2\theta_0) \qquad (1.a)$$

$$(-1/2)\{-\rho_x(\theta)+\rho_y(\theta)\}\sin\theta_0\cos\theta_0+\int_0^{2\pi}K_{nt}^{Fx}(\phi,\theta)\rho_x(\phi)b\cos\phi\,d\phi+\int_0^{2\pi}K_{nt}^{Fy}(\phi,\theta)\rho_y(\phi)a\sin\phi\,d\phi=-(\sigma_y^\infty-\sigma_x^\infty)\sin\theta_0\cos\theta_0 \qquad (1.b)$$

式(1)の第二項および第三項は、$1/\sin\{(\theta-\phi)/2\}$の特異性を有する項を含んでいる[3]。そのため$\theta=\phi$の場合にはCauchyの主値をとるものとする。

特異積分方程式(1)の未知関数である$\rho_x(\phi)$, $\rho_y(\phi)$はだ円孔となる仮想境界の微小要素$ds=\sqrt{d\xi^2+d\eta^2}$に作用する力のξ, η方向の成分をそれぞれdF_ξ, dF_ηとするとき次式で定義される。

$$\rho_x(\phi)=\frac{dF_\xi}{d\eta},\ \rho_y(\phi)=\frac{dF_\eta}{d\xi} \qquad (2)$$

もし体積力の密度として通常の密度の定義に用いられるように、境界に沿った長さ当たりの定義［$\rho_x^*(\phi)$, $\rho_y^*(\phi)$］を用いるものとすれば特異積分方程式(1)の解法は、未知関数$\rho_x^*(\phi)$, $\rho_y^*(\phi)$を重み関数$\rho_x(\phi)$, $\rho_y(\phi)$と基本密度関数の積で近似して解くことに相当している。

$$\rho_x^*(\phi)=\frac{dF_\xi}{ds}=\frac{dF_\xi}{d\eta}n_x(\phi)=\rho_x(\phi)n_x(\phi)$$
$$\rho_y^*(\phi)=\frac{dF_\eta}{ds}=\frac{dF_\eta}{d\xi}n_y(\phi)=\rho_y(\phi)n_y(\phi) \qquad (3)$$

ここで、$n_x(\phi)$, $n_y(\phi)$は仮想境界上の点（x,y）における単位外向き法線ベクトルの座標成分である。式(3)中の$\rho_x(\phi)$, $\rho_y(\phi)$が重み関数であり、$n_x(\phi)$, $n_y(\phi)$が基本密度関数である[1]。

前報と同様に、未知関数を連続関数として近似するために、$\rho_x(\phi)$, $\rho_y(\phi)$を次式で表現する。

$$\rho_x(\phi)=\sum_{n=1}^{M1}a_nt_n(\phi) \qquad (-\pi/2\leqq\theta\leqq\pi/2)$$
$$t_n(\phi)=\cos\{(\pi/2-\phi)(n-1)\} \qquad (1\leqq n\leqq M1)$$
$$\rho_x(\phi)=\sum_{n=M1+1}^{M1+M2}a_ns_n(\phi) \qquad (\pi/2\leqq\theta\leqq3\pi/2)$$
$$s_n(\phi)=\cos\{(\pi/2-\phi)(n-M-1)\} \qquad (M1+1\leqq n\leqq M)$$
$$\rho_y(\phi)=\sum_{n=1}^{M1+M2}b_nt_n(\phi)$$
$$t_n(\phi)=\cos\{(\pi/2-\phi)(n-1)\} \qquad (4)$$

ここでM1, M2は、それぞれ$0\leqq\theta\leqq\pi/2$, $\pi/2\leqq\theta\leqq\pi$の選点数であり、総選点数は$M=M1+M2$である。したがって、式(4)は、$\rho_x(\phi)$を$-\pi/2\leqq\theta\leqq\pi/2$でM1次、$\pi/2\leqq\theta\leqq3\pi/2$でM2次の多項式で近似して、$\rho_y(\phi)$を$0\leqq\theta\leqq\pi$で$M=M1+M2$次の多項式で近似することを意味している。ここで、$\rho_x(\phi)$を$t_n(\phi)$と$s_n(\phi)$の2つの多項式で近似する理由は、$\phi=\pi/2$において$n_x(\phi)=0$であるので$\rho_x^*(\phi)$が$\phi=\pi/2$で連続でも$\rho_x(\phi)$は$\phi=\pi/2$で不連続となるためである（つまり、2だ円孔の干渉によって，$\rho_x^*(\pi/2)\neq0$となるが、$n_x(\pi/2)=0$であるために，$\rho_x(\pi/2-0)=+\infty$および$\rho_x(\pi/2+0)=-\infty$となる)。

以上の離散化の方法により、式(1)の特異積分方程式は、係数a_n, b_nについての2M元の連立方程式に還元される。

$$\sum_{n=1}^{M}(a_nA_n+b_nB_n)=-(\sigma_x^\infty\cos^2\theta_0+\sigma_y^\infty\sin^2\theta_0)$$
$$\sum_{n=1}^{M}(a_nC_n+b_nD_n)=-(\sigma_y^\infty-\sigma_x^\infty)\sin\theta_0\cos\theta_0 \qquad (5)$$

任意の点の応力は係数 a_n, b_n と A_n〜D_n に相当する影響係数の一次結合で表される。以上の解析の方法により、無限板中の等大 2 だ円孔の境界上の応力分布ならびに最大応力を求める。

3. 従来の基本密度関数のみを用いた場合の解析結果

図 2 の無限板中の 2 だ円孔の問題において、形状比が、$a/b=1$, $d/a=3$, $\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$ の場合の点 A ($\theta=0°$) および点 B ($\theta=180°$) における応力集中係数の値の収束状況を階段関数を用いた体積力法の解析結果とともに表 1 示す。表中の階段関数を用いた体積力法の応力集中係数の外挿値 ($M=\infty$) は、分割数 $M=48$, 32 における解析結果から求めたものである。本解析による応力集中係数は、$M=8$ 程度で K_{tA}, K_{tB} ともに Ling の解析結果[5] と有効数字 4 桁まで一致している。これは外挿を必要とする従来の体積力法の解析結果よりも良好な収束性を示している。

境界条件 ($\sigma_n=0$, $\tau_{nt}=0$) の満足度を確かめるために、だ円孔縁に沿った応力 σ_t, σ_n, τ_{nt} の分布を表 2、表 3 に示す。このとき選点数は $M=16$ である。表 1 に示したように、最大応力の値は、Ling の解析結果と一致しているにも関わらず、表 2、3 共に、境界上で 0 であるべき σ_n および τ_{nt} の値は、90° ±10° 付近で満足度が悪い。このことは、従来の解析では、仮想境界上にモード I 型の集中力のみを分布させていることが原因であると思われる。このため図 2 で示したように、混合モードとなる $\theta=90°$ 付近の仮想境界上では、モード II 型の応力成分が打ち消されずに残っているものと考えられる。

表 1　応力集中係数の収束性

本解析法			階段関数を用いた体積力法		
M	K_{tA}	K_{tB}	M	K_{tA}	K_{tB}
4	3.02246	2.99350	4	3.01615	3.00564
8	3.02018	2.99247	8	3.01823	2.99917
12	3.02000	2.99246	16	3.01921	2.99917
16	3.02001	2.99240	32	3.01967	2.99571
			48	3.01982	2.99395
			∞ (48-32)	3.0201	2.99363
			文献 (5)		2.9922

表 2　境界に沿った応力分布

θ [deg.]	σ_t	σ_n	τ_{nt}
0.	3.02001	−0.000317	0.000000
20.	2.55390	−0.000333	−0.000345
40.	1.37677	−0.000139	−0.000179
60.	0.04621	0.000788	0.001175
80.	−0.80503	0.002580	0.009009
86.	−0.88501	−0.000609	−0.006905
88.	−0.90409	−0.000093	−0.013961
90.	−0.91989	0.000000	−0.015511
92.	−0.92579	0.000093	−0.013961
94.	−0.92017	0.000609	−0.006905
100.	−0.79335	−0.002580	0.009009
120.	0.10783	−0.000788	0.001175
140.	1.43530	0.000139	−0.000179
160.	2.56053	0.000333	−0.000345
180.	2.99240	0.000370	0.000000

表 3　境界に沿った応力分布

θ [deg.]	σ_t	σ_n	τ_{nt}
0.	−0.33660	0.000646	0.000000
20.	−0.04927	0.000666	0.000691
40.	0.81904	0.000278	0.000358
60.	1.96456	−0.001577	−0.002349
80.	2.72493	−0.005158	0.018011
86.	2.76768	0.001219	0.013805
88.	2.79911	−0.001865	0.027910
90.	2.82455	0.000000	0.031079
92.	2.83067	0.001865	0.027910
94.	2.79846	−0.001219	0.013805
100.	2.70069	0.005158	0.018011
120.	1.85017	0.001577	−0.002349
140.	0.72476	−0.000278	0.000358
160.	−0.06917	−0.000666	0.000691
180.	−0.32415	−0.000640	0.000000

4. 新基本密度関数を用いる場合の解析法

4.1 引張問題の基本密度関数の定義

図 2 に示す 2 だ円孔の干渉問題を厳密に解析するために、式(7)で定義される補助関数を考えるとこれらの関数は、それぞれ式(8.a)〜(8.d)の関係を満たす。

$$\rho_{x1}^*(\phi)=\{\rho_x^*(\phi)+\rho_x^*(\pi-\phi)\}/2$$
$$\rho_{x3}^*(\phi)=\{\rho_x^*(\phi)-\rho_x^*(\pi-\phi)\}/2$$
$$\rho_{y2}^*(\phi)=\{\rho_y^*(\phi)+\rho_y^*(\pi-\phi)\}/2$$
$$\rho_{y4}^*(\phi)=\{\rho_y^*(\phi)-\rho_y^*(\pi-\phi)\}/2 \tag{7}$$

ここで、$\rho_{x1}^*(\phi)$ は $\rho_x^*(\phi)$ と $\rho_x^*(\pi-\phi)$ の平均値であり、$\rho_{x3}^*(\phi)$ は $\rho_x^*(\phi)$ と $\rho_x^*(\pi-\phi)$ の平均値からのずれを表わしている。$\rho_{y2}^*(\phi)$, ρ_{y4}^* も同様である。

$$\rho_{x1}^*(\phi)=\rho_{x1}^*(\pi-\phi)$$
$$\rho_{x3}^*(\phi)=-\rho_{x3}^*(\pi-\phi)$$
$$\rho_{y2}^*(\phi)=\rho_{y2}^*(\pi-\phi)$$
$$\rho_{y4}^*(\phi)=-\rho_{y4}^*(\pi-\phi) \tag{8}$$

式(8)より、関数 $\rho_{x1}^*(\phi)$ 〜 $\rho_{y4}^*(\phi)$ を $0\leqq\phi\leqq\pi/2$ の範囲で求めることは、関数 $\rho_x^*(\phi)$, $\rho_y^*(\phi)$ を $0\leqq\phi\leqq\pi$ の全範囲で求めることに等しい。すなわち、

$0 \leqq \phi \leqq \pi/2$ で $\rho^*_{x1}(\phi) \sim \rho^*_{x4}(\phi)$ が与えられるとき、式(9)に示されるように $0 \leqq \phi \leqq \pi$ での $\rho^*_x(\phi)$, $\rho^*_y(\phi)$ が与えられる。

$$\begin{aligned} &\rho^*_x(\phi)=\rho^*_{x1}(\phi)+\rho^*_{x3}(\phi) \\ &\rho^*_x(\pi-\phi)=\rho^*_{x1}(\phi)-\rho^*_{x3}(\phi) \\ &\rho^*_y(\phi)=\rho^*_{y2}(\phi)+\rho^*_{y4}(\phi) \\ &\rho^*_y(\pi-\phi)=\rho^*_{y2}(\phi)-\rho^*_{y4}(\phi) \end{aligned} \tag{9}$$

いま、この問題の基本密度関数 $w_{x1}(\phi) \sim w_{y4}(\phi)$ を式(10)で定義すると、式(10)は式(8)を満足する。

$$\begin{aligned} &w_{x1}(\phi)= n_x(\phi)/\cos\phi \\ &w_{x3}(\phi)= n_x(\phi) \\ &w_{y2}(\phi)= n_y(\phi) \\ &w_{y2}(\phi)= n_y(\phi)\cos\phi \end{aligned} \tag{10}$$

ここで、式(10)中の $w_{x3}(\phi)$, $w_{y2}(\phi)$ は無限板中の1だ円孔を厳密に表現する体積力密度の厳密解であり、従来の体積力法で用いられている基本密度関数［式(3)の $n_x(\phi)$, $n_y(\phi)$ である。このような関数を用いて $\rho^*_{x1}(\phi) \sim \rho^*_{y4}(\phi)$ を式(11)のように表現すると、基本密度に乗ずる重み関数 $\rho_{x1}(\phi) \sim \rho_{y4}(\phi)$（未知関数）が満足すべき条件は式(12)で表される。

$$\begin{aligned} &\rho^*_{x1}(\phi)=\rho_{x1}(\phi)w_{x1}(\phi) \\ &\rho^*_{x3}(\phi)=\rho_{x3}(\phi)w_{x3}(\phi) \\ &\rho^*_{y2}(\phi)=\rho_{y2}(\phi)w_{y2}(\phi) \\ &\rho^*_{y4}(\phi)=\rho_{y4}(\phi)w_{y4}(\phi) \end{aligned} \tag{11}$$

$$f(\phi)=f(\pi-\phi) \tag{12}$$

結局、未知関数 $\rho^*_x(\phi)$, $\rho^*_y(\phi)$ は重み関数 $\rho_{x1}(\phi) \sim \rho_{y4}(\phi)$ と基本密度関数 $w_{x1}(\phi) \sim w_{y4}(\phi)$ を用いて次のように表現される。

$$\begin{aligned} &\rho^*_x(\phi)=\rho_{x1}(\phi)w_{x1}(\phi)+\rho_{x3}(\phi)w_{x3}(\phi) \\ &\rho^*_y(\phi)=\rho_{y2}(\phi)w_{y2}(\phi)+\rho_{y4}(\phi)w_{y4}(\phi) \end{aligned} \tag{13}$$

4.2 特異積分方程式の離散化数値解析法

式(13)の表現を用いると式(1)の特異積分方程式は次式のように表現できる。

$$\begin{aligned} &(-1/2)[\{\rho_{x1}(\theta)/\cos\theta+\rho_{x3}(\theta)\}\cos^2\theta_0 \\ &\qquad +\{\rho_{y2}(\theta)+\rho_{y4}(\theta)\cos\theta\}\sin^2\theta_0] \\ &+\int_0^{2\pi} K^{Fx}_{nn}(\phi,\theta)\{\rho_{x1}(\phi)/\cos\phi+\rho_{x3}(\phi)\}b\cos\phi\, d\phi \\ &+\int_0^{2\pi} K^{Fy}_{nn}(\phi,\theta)\{\rho_{y2}(\phi)+\rho_{y4}(\phi)\cos\phi\}a\sin\phi\, d\phi \\ &=-(\sigma^\infty_x\cos^2\theta_0+\sigma^\infty_y\sin^2\theta_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-1/2)[-\{\rho_{x1}(\theta)/\cos\theta+\rho_{x3}(\theta)\} \\ &\qquad +\{\rho_{y2}(\theta)+\rho_{y4}(\theta)\cos\theta_0\}\sin\theta_0\cos\theta_0 \\ &+\int_0^{2\pi} K^{Fx}_{nt}(\phi,\theta)\{\rho_{x1}(\phi)/\cos\phi+\rho_{x3}(\phi)\}b\cos\phi\, d\phi \\ &+\int_0^{2\pi} K^{Fy}_{nt}(\phi,\theta)\{\rho_{y2}(\phi)+\rho_{y4}(\phi)\cos\phi\}a\sin\phi\, d\phi \\ &=-(\sigma^\infty_y-\sigma^\infty_x)\sin\theta_0\cos\theta_0 \end{aligned} \tag{14}$$

重み関数を式(12)を満足する連続関数として、式(15)、(16)のように表現する。

$$\begin{aligned} &\rho_{x1}(\phi)=\sum_{n=1}^{M/2} a_n t_n(\phi),\ \rho_{x3}(\phi)=\sum_{n=1}^{M/2} b_n t_n(\phi) \\ &\rho_{y2}(\phi)=\sum_{n=1}^{M/2} c_n t_n(\phi),\ \rho_{y4}(\phi)=\sum_{n=1}^{M/2} d_n t_n(\phi) \end{aligned} \tag{15}$$

$$t_n(\phi)=\cos\{2(n-1)\phi\} \tag{16}$$

式(15)で定義される重み関数 $\rho_{x1}(\phi) \sim \rho_{y4}(\phi)$ は、次式で表わされるような周期性と対称性がある。

$$\rho(\phi)=\rho(\phi+\pi) \qquad \text{（周期性）} \tag{17}$$

$$\rho(\phi)=\rho(-\phi),\ \rho(\pi/2+\phi)=\rho(\pi/2-\phi) \qquad \text{（対称性）} \tag{18}$$

すなわち、未知関数 $\rho_{x1}(\phi) \sim \rho_{y4}(\phi)$ は $0 \leqq \phi \leqq \pi/2$ で定義され、$\phi=0$, $\pi/2$, π で対称な関数とみなすことができる。

以上の離散化の方法により、式(14)は係数 $a_n \sim d_n$ についての4M元の連立方程式(19)に還元される。

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{M/2}(a_nA_n+b_nB_n+c_nC_n+d_nD_n)=-(\sigma^\infty_x\cos^2\theta_0+\sigma^\infty_y\sin^2\theta_0) \\ &\sum_{n=1}^{M/2}(a_nE_n+b_nF_n+c_nG_n+d_nH_n)=-(\sigma^\infty_y-\sigma^\infty_x)\sin\theta_0\cos\theta_0 \end{aligned} \tag{19}$$

したがって、だ円境界上のそれぞれで適当に選んだM個の点（$\phi=\phi_n$, $\pi-\phi_n$, n=1, …., M/2のように選ぶ）で境界条件を満足するように式(17)の連立方程式を解けば、任意の点の応力は係数 $a_n \sim d_n$ と $A_n \sim D_n$ の影響係数の一次結合で表現される。以上の解析の方法により、無限板中の等大2だ円孔の境界上の応力分布ならびに最大応力を求める。

5. 新基本密度関数を用いた解析結果および考察

5.1 重み関数の収束性

図2に示した2だ円孔の干渉問題において、a/b=1, a/d=2/3, $\sigma^\infty_x=0$, $\sigma^\infty_y=1$ の場合、重み関数

の収束状況を表 4 に示す。本解析結果は、選点数 M=8 と M=12 のとき有効数字 5 けた程度まで収束していて良好な収束性を示している。このような良好な収束性を示すことから、連続関数である重み関数をうまく近似できているものと考えられる。

表 4　未知関数の収束状況
($a/b=1$, $a/d=2/3$, $\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$)

θ[deg.]	M	ρ_{x1}	ρ_{x3}	ρ_{y2}	ρ_{y4}
0	4	−0.0301	−0.8914	2.9828	0.0528
	8	−0.0401	−0.8899	2.9787	0.0615
	12	−0.0401	−0.8899	2.9787	0.0615
20	4	−0.0276	−0.8972	2.9875	0.0517
	8	−0.0282	−0.8971	2.9853	0.0615
	12	−0.0282	−0.8971	2.9853	0.0615
40	4	−0.0062	−0.912	2.9994	0.0457
	8	−0.0026	−0.9135	3.0000	0.0498
	12	−0.0026	−0.9135	3.0000	0.0498
60	4	0.0180	−0.9288	3.0129	0.0457
	8	0.0197	−0.9288	3.0137	0.0419
	12	0.0197	−0.9288	3.0137	0.0419
80	4	0.0338	−0.9398	3.0217	0.0436
	8	0.0312	−0.9373	3.0211	0.0375
	12	0.0312	−0.9373	3.0211	0.0375
90	4	0.0360	−0.9413	3.0229	0.0433
	8	0.0326	−0.9384	3.0221	0.0379
	12	0.0326	−0.9384	3.0221	0.0379

5.2　重み関数の離散化の方法の検討

4 節において、新しい x, y 方向についてそれぞれ 2 種類の基本密度関数 $w_{x1}(\phi)$, $w_{x3}(\phi)$, $w_{y2}(\phi)$, $w_{y4}(\phi)$ を定義し、未知関数である体積力密度 $\rho_x^*(\phi)$, $\rho_y^*(\phi)$ を式(13)で示したように、これらの基本密度関数と重み関数 $\rho_{x1}(\phi)$, $\rho_{x3}(\phi)$, $\rho_{y2}(\phi)$, $\rho_{y4}(\phi)$ の一次結合で離散化する解析法を提案した。一方、従来の体積力法では、体積力密度を式(3)のように重み関数 $\rho_x(\phi)$, $\rho_y(\phi)$ で離散化する。これらの離散化の方法により、重み関数が新たな未知関数となる。したがって、本解析における未知関数の個数は 4 個、従来の体積力法の未知関数の個数は 2 個であり、本解析の未知関数の個数は従来の体積力法の 2 倍になっている。このように増えた未知関数をどのように決定すればよいか、決定するにあたり矛盾が生じないかという疑問が生じる。ここでは、この点について検討を行う。

具体的には、図 2 の問題において、円孔の境界に沿った x 方向の体積力密度 $\rho_x^*(\phi)$ の離散化の方法を従来の体積力法と本解析法による実際の解析結果を比較して検討する。

従来の体積力法では、求めるべき重み関数を分割した各区間で一定値をとる階段関数で近似する。したがって、問題を解くことは、分割した区間の中点の境界条件から各区間で一定値となる階段の高さを求めることに帰着される。

一方本解析では、未知関数を新しく定義した基本密度関数と重み関数の一次結合で表現し、さらに重み関数を連続関数として近似する［式(13)～(18)］。この離散化の方法により、問題は係数 a_n～d_n を求めることに帰着される。

従来の体積力法による実際の解析結果として、図 2 の問題において、分割数 M=2 で、形状比が $a/b=1$, $a/d=0.9$ の場合、x 方向の体積力密度 $\rho_x^*(\phi)$ を近似した結果を図 3 に示す。このとき、求めるべき未知数は、2 分割したそれぞれの区間の階段の高さであり、重み関数 $\rho_{x3}(\phi)$ について 2 個である。

一方、本解析法を用いて、図 3 と同じ形状で解析を行う。選点数が M=2 の場合において、x 方向の体積力密度 $\rho_x^*(\phi)$ を近似した結果を図 4 に示す。解析において、解析可能な最低の選点数は、式(15)で示した重み関数の離散化の方法により M=2 である。このとき求めるべき未知数は、係数 a_n, b_n である。M=2 の場合の重み関数を離散化した形を $\rho_{x1}(\phi)$ を例にとって示すと、

$$\rho_{x1}(\phi)=\sum_{n=1}^{2/2} a_n\cos\{(2n-1)\phi\}=a_1\cos\{(2n-1)\phi\}=a_1\cos 0=a_1 \tag{20}$$

となる。したがって、この場合、重み関数 $\rho_{x1}(\phi)$ について、一定の係数 a_1 を決めることになる。また、重み関数 $\rho_{x3}(\phi)$ についても同様にして、一定の係数 b_1 を決めることになる。すなわち、決定すべき未知数は、選点数が 2 の場合 $\rho_x^*(\phi)$ に関して、a_1, b_1 の 2 個であり、階段関数を用いる従来の体積力法の分割数が 2 の場合と同じである。

結局、本解析法では、従来の解析法と比較すると、未知関数は 1 個から 2 個に増えるが、式(17), (18)に示したように、その定義域は $0\leqq\phi\leqq\pi$ から 1/2 の $0\leqq\phi\leqq\pi/2$ の範囲（$\phi=0$, $\pi/2$, π に対称な関数）となり、従来の体積力法と比べて離散化の自由度は同じである。

また、図 3(d)、図 4(d)は解析によって得られた重み関数から計算された体積力密度 $\rho_x^*(\phi)$ の値である。選点数が 2 と少ないために両者の間に差はあまり生じていないが、選点数を増加させると本解析結果が真の体積力密度完全に収束するのに対し、階段関数を用いる場合分割数を増加させても体積力密度が収束しない。ここで、図 3、4 に示した体積力密度 $\rho_x^*(\phi)$ の図は、

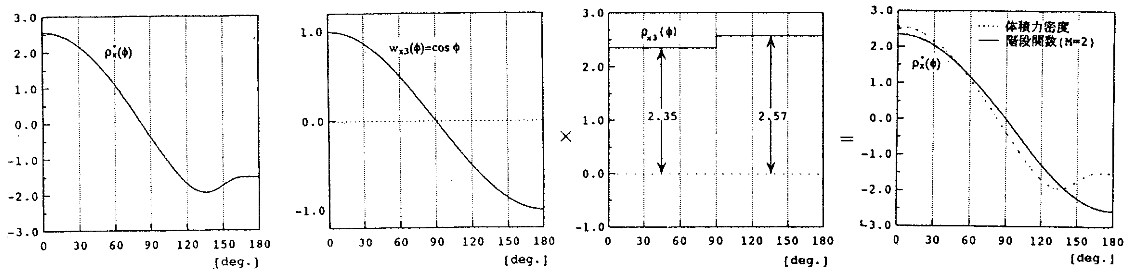
本解析において求めたものであるが、解の収束性（表5）と高い境界条件の満足度（表6、7）を確認しており真の密度であると考えられる。

5.3　境界条件（$\sigma_n=0$, $\tau_{nt}=0$）の満足度の検討

本解析による境界条件の満足度を確かめるために、図2の問題において、形状比が a/b=1, a/d=1/3, $\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$ の場合、円孔縁における応力 σ_t, σ_n, τ_{nt} の分布を表5に、$\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$ の場合の分布を表6に示す。表2, 3で示したように、式(1)の未知関数 $\rho_x^*(\phi)$, $\rho_y^*(\phi)$ を多項式のみで近似する方法では、境界上にモードII型の応力成分が残り、境界条件を完全には満足させることができなかった。一方本解析では、境界上で0であるべき、σ_n, τ_{nt} の値は円孔縁全周においてM=8程度でも 10^{-5} 以下であり、高い境界条件の満足度が確かめられた。

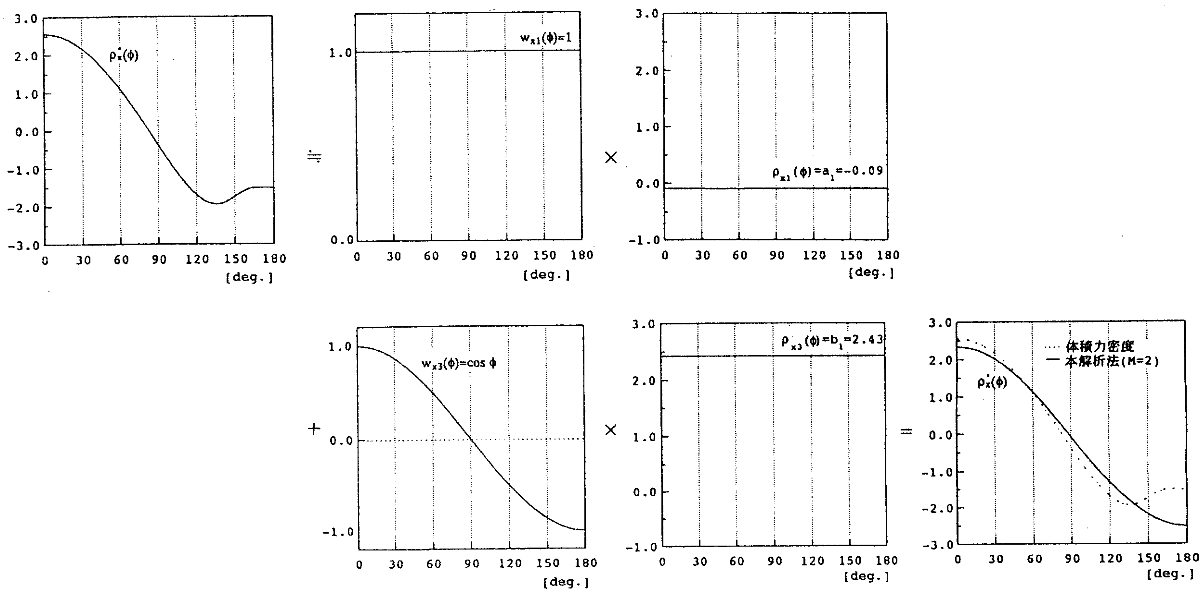
5.4　2円孔の干渉問題の最大応力の収束性

形状比が a/b=1, $\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$ 応力集中係数の収束状況をLingの解析結果[5]とともに表7に示す。表中の θ は最大応力が生じる位置である。本解析結果はM=16程度で有効数字6桁まで完全に収束していて良好な収束性を示している。Lingの解析結果と比較すると、a/dが小さいとき両者はよく一致するが、a/dが大きくなるにつれて、本解析結果との間に最大2%程度の違いが生じる。



(a) 真の密度分布 $\rho_x^*(\phi)$　(b) 基本密度関数 $w_{x3}(\phi)=\cos\phi$　(c) 重み関数 $\rho_{x3}(\phi$：階段関数　(d) 体積力密度

図3　従来の体積力法における密度関数 $\rho_x^*(\phi)$ の近似（分割数2の場合）



(a) 真の密度分布　(b) 基本密度関数　(c) 重み関数　(d) 体積力密度

図4　本解析における密度関数 $\rho_x^*(\phi)$ の近似（選点数2の場合）

表5　境界上の応力分布
($a/b=1$, $d/a=3$, $\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$)

θ [deg.]	M	σ_t	σ_n	τ_{nt}
0	4	3.0188	-9.4×10^{-4}	0
	8	3.0197	-2.9×10^{-6}	0
	12	3.0197	-4.9×10^{-9}	0
40	4	1.3759	8.1×10^{-4}	8.1×10^{-4}
	8	1.3747	-2.0×10^{-6}	-2.0×10^{-6}
	12	1.3747	2.1×10^{-9}	2.1×10^{-9}
80	4	−0.8154	-3.7×10^{-4}	-3.7×10^{-4}
	8	−0.8135	-2.4×10^{-7}	-2.4×10^{-7}
	12	−0.8135	1.1×10^{-9}	1.1×10^{-9}
90	4	−0.9191	-3.1×10^{-4}	-3.1×10^{-4}
	8	−0.9188	-8.6×10^{-7}	-8.6×10^{-7}
	12	−0.9188	-1.3×10^{-9}	-1.3×10^{-9}
100	4	−0.7812	-7.3×10^{-4}	-7.3×10^{-4}
	8	−0.7829	-3.7×10^{-8}	-3.7×10^{-8}
	12	−0.7829	1.5×10^{-10}	1.5×10^{-10}
120	4	1.4358	-1.1×10^{-3}	-1.1×10^{-3}
	8	1.4379	2.4×10^{-6}	2.4×10^{-6}
	12	1.4379	-2.5×10^{-9}	-2.5×10^{-9}
180	4	2.9929	2.0×10^{-3}	0
	8	2.9908	5.4×10^{-6}	0
	12	2.9908	8.5×10^{-9}	0

表6　境界上の応力分布
($a/b=1$, $d/a=3$, $\sigma_x^\infty=1$, $\sigma_y^\infty=0$)

θ [deg.]	M	σ_t	σ_n	τ_{nt}
0	4	−0.9376	-1.4×10^{-3}	0
	8	−0.9391	3.7×10^{-6}	0
	12	−0.9391	5.8×10^{-9}	0
40	4	0.6548	-1.2×10^{-3}	7.7×10^{-4}
	8	0.6567	2.5×10^{-6}	-1.6×10^{-6}
	12	0.6567	2.1×10^{-9}	1.6×10^{-9}
80	4	2.7413	5.9×10^{-4}	1.3×10^{-4}
	8	2.7385	3.1×10^{-7}	-7.3×10^{-7}
	12	2.7384	-1.3×10^{-9}	3.2×10^{-8}
86	4	2.8190	5.9×10^{-4}	-1.7×10^{-3}
	8	2.8174	1.1×10^{-6}	3.8×10^{-6}
	12	2.8174	-1.3×10^{-9}	-4.6×10^{-9}
88.6	4	2.8264	5.4×10^{-4}	-1.8×10^{-3}
	8	2.8255	1.1×10^{-6}	-4.5×10^{-6}
	12	2.8255	1.7×10^{-9}	-6.7×10^{-9}
90	4	2.8233	5.0×10^{-4}	-1.9×10^{-3}
	8	2.8228	1.1×10^{-6}	4.7×10^{-6}
	12	2.8228	1.6×10^{-9}	-7.1×10^{-9}
94	4	2.7910	3.6×10^{-4}	-1.9×10^{-3}
	8	2.7917	6.8×10^{-7}	-4.1×10^{-6}
	12	2.7917	7.7×10^{-10}	-4.9×10^{-8}
100	4	2.6735	1.3×10^{-4}	-1.6×10^{-3}
	8	2.6735	5.1×10^{-8}	-8.8×10^{-7}
	12	2.6735	-1.9×10^{-10}	3.8×10^{-9}
120	4	0.5597	1.6×10^{-3}	1.9×10^{-3}
	8	0.5567	-3.0×10^{-6}	-3.5×10^{-6}
	12	0.5567	3.0×10^{-9}	3.4×10^{-9}
180	4	−0.8381	-3.0×10^{-3}	0
	8	−0.8350	-6.7×10^{-6}	0
	12	−0.8350	-1.0×10^{-8}	0

表7　最大応力の収束性
($a/b=1$, $d/a=3$, $\sigma_x^\infty=0$, $\sigma_y^\infty=1$)

a/d	0.125	0.2	1/3	0.5	2/3
	K_t	K_t	K_t	K_t	K_t
M	$\theta=89.9°$	$\theta=89.6°$	$\theta=88.6°$	$\theta=86.7°$	$\theta=85.0°$
4	2.96980	2.92673	2.82645	2.71621	2.67737
8	2.96980	2.92669	2.82554	2.70667	2.6413
12	2.96980	2.92669	2.82553	2.70652	2.63978
16	2.96980	2.92669	2.82553	2.72650	2.63976
20					2.63976
文献(5)	2.970	2.927	2.825	2.703	2.623

6. 結　　言

本論文では、前報で提案した特異積分方程式の高精度解析法を孔による応力集中の基本的問題である無限板中の2だ円孔の干渉問題に適用する数値解析法を考察した。前報で提案した解析法を用いた場合と本報で提案した方法を用いた場合とで境界条件の満足度等の検討を行い解析精度を確認した。結果をまとめると以下のようになる。

(1)　無限板中の1だ円孔を表現する体積力密度の厳密解のみを基本密度関数として用いて、無限板中の2だ円孔の干渉問題の解析を行った。その結果、本解析法は従来の体積力法よりも良好な応力集中係数の収束性が得られた。また、Lingの最大応力を求めた解析結果は本解析結果と良く一致した。しかし、境界条件の満足度を調べた結果、モードI型の体積力を境界上に分布させただけでは、モードII型の応力成分が打ち消されずにが残る場合があることがわかった。

(2)　境界条件を完全に満足させるために、x方向およびy方向の体積力に関してそれぞれ1つずつ種類（計2種類）の基本密度関数を従来用いられているき本密度関数に加えて新しく定義した。そして、特異積分方程式の未知関数である体積力密度をこれらの基本密度関数と重み関数の一次結合で近似する解析方法を示した。

(3)　無限板中の2だ円孔の干渉問題の解析を行った結果、モードI型の体積力を分布させただけでは、境界上にモードII型の応力成分が残り境界条件を完全に満足させることができなかったが、モードI型、モードII型の基本密度関数を同時に分布させることで、境界上のいずれの点でも境界条件をほとんど完全に満足させることが可能となった。

参 考 文 献

(1)　松尾忠利：福島高専研究紀要、39（1999）P.9.

(2)　野田尚昭・小田和広・陳玳珩：日本機械学会論文集（A編），56-532（1990）p.2405.

(3)　西谷弘信・陳玳珩、体積力法（重ね合せの原理による数値解析法）、培風館、(1987).

(4)　西谷弘信：日本機械学会誌、70-580（1967)p.627.

(5)　Ling, C.B.：J. App. Phy.,Vol. 19（1948）p.77.